



Soluții și barem de corectare-

Olimpiada locala clasa a XI a 24 februarie 2019

1. Trebuie arătat că $\det(A) \neq 0$ 1p

$$\det(A) = \left(a + b + c - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc - a + \frac{b+c}{2} + \frac{1}{4}\right) \dots\dots\dots 2p$$

$$a + b + c - \frac{1}{2} \neq 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc - a + \frac{b+c}{2} + \frac{1}{4} \neq 0 \text{ (justificare) } \dots\dots\dots 3p$$

$$2. \text{ a) } A^2 + I_n = 2A, \text{ deci } (A - I_n)^2 = O_n \text{ și putem lua } A - I_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, a \in \square,$$

$$\text{deci matricele } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & a \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, a \in \square \text{ verifică cerința} \dots\dots\dots 3p$$

b) Avem $A^k - I_n = (A - I_n)B = B(A - I_n)$, unde $B = A^{k-1} + \dots + A + I_n$. Atunci

$$A^{2k} + I_n = 2A^k \Leftrightarrow (A^k - I_n)^2 = O_n \Leftrightarrow B(A - I_n)(A - I_n)B = O_n \Leftrightarrow B(A - I_n)^2 B = O_n,$$

adevărat, deoarece $(A - I_n)^2 = O_n$ 4p

$$3 \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4^x + 9^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{4^x + 9^x - 2}{x} \right)} = e^{\frac{1}{2}(\ln 4 + \ln 9)} = 6$$

.....4p

$$b) \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x} = \frac{\sqrt{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}}{x} = \frac{\sqrt{2} \cdot \left| \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right|}{x} \dots\dots\dots 1p$$

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt{2} \cdot \left| \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right|}{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ iar } \lim_{x \nearrow 0} \frac{\sqrt{2} \cdot \left| \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right|}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ deci limita cerută nu există} \dots\dots\dots 2p$$

1. a) Se obține $3^b - 3^a < 5^b - 5^a \Leftrightarrow 3^a(3^{b-a} - 1) < 5^a(5^{b-a} - 1)$, adevărat, deoarece $0 < 3^a < 5^a$ și $0 < 3^{b-a} - 1 < 5^{b-a} - 1$2p

b) Avem $5^{x_n} - 3^{x_n} = 2^{x_{n+1}} > 0$, deci $x_n > 0, \forall n \geq 1$. Presupunem prin absurd că $x_1 < 1$. Atunci $2^{x_2} = 5^{x_1} - 3^{x_1} < 2^{x_1} \Rightarrow x_2 < x_1$ și, inductiv, ținând cont de a), rezultă că $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător și, cum $x_n > 0, \forall n \geq 1$, rezultă că $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent. Dacă $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, trecând la limită în relația de recurență, se obține că $2^L = 5^L - 3^L$ cu unica soluție $L = 1$, fals. Așadar $x_1 \geq 1$2p

Dacă $x_1 > 1 \Rightarrow 2^{x_2} = 5^{x_1} - 3^{x_1} > 2^{x_1} \Rightarrow x_2 > x_1$, și, inductiv, folosind a), se obține că $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător, deci există $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \bar{\mathbb{R}}$. Dacă $L \in \mathbb{R}$ s-ar obține $2^L = 5^L - 3^L$ cu soluția $L = 1$, fals. Așadar $L = \infty$, adică $(x_n)_{n \geq 1}$ este divergent, fals.....2p

Deci $x_1 = 1$ și, inductiv, $x_n = 1, \forall n \geq 1$, situație în care $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent. Așadar $x_{2019} = 1$1p