

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 14 februarie 2025
Soluţii

Clasa a IX-a

1. (a) Arătaţi că $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
 (b) Demonstraţi că dacă $a, b, c > 0$ şi $a^3 + b^3 + c^3 = 3$, atunci $ab + bc + ca \leq 3$.

Romeo Ilie

Soluţie.

(a) Relaţia se demonstrează prin calcul direct **2p**

(b) **Soluţia 1.** Din $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$

şi relaţia (a) rezultă $abc \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$, $\forall a, b, c > 0$.

(Se poate aplica direct inegalitatea mediilor.)

..... **1p**

Fie $a, b, c > 0$, astfel încât $a^3 + b^3 + c^3 = 3$.

Avem $ab = a \cdot b \cdot 1 \leq \frac{a^3 + b^3 + 1}{3}$ şi inegalităţile analoage..... **2p**

Rezultă $ab + bc + ca \leq \frac{2(a^3 + b^3 + c^3) + 3}{3} = 3$ **2p**

Soluţia a 2-a. Fie $a, b, c > 0$, astfel încât $a^3 + b^3 + c^3 = 3$.

Din convexitatea funcţiei $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, rezultă

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leq \frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} = 1.$$

Rezultă $0 < a + b + c \leq 3$ **3p**

Atunci $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 9$, de unde $ab + bc + ca \leq 3$ **2p**

Observaţie. Egalitatea se realizează dacă şi numai dacă $a = b = c = 1$.

2. Rezolvați ecuația $[x]^2 = 3x + 3$, unde prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a .

Florin Cârstea

Soluție.

Din relația $x = [x] + \{x\}$, rezultă că ecuația poate fi reprezentată echivalent prin $[x]^2 - 3[x] - 3 = 3\{x\}$ **1p**

Din proprietățile $[x] \in \mathbb{Z}$ și $\{x\} \in [0, 1)$ rezultă $[x]^2 - 3[x] - 3 \in \mathbb{Z} \cap [0, 3) = \{0, 1, 2\}$.
..... **3p**

Ecuatiile $t^2 - 3t - 3 = 0$ și $t^2 - 3t - 3 = 2$ nu au rădăcini întregi **1p**

Ecuatia $t^2 - 3t - 3 = 1$ are rădăcinile întregi $t_1 = -1$ și $t_2 = 4$.

Obținem soluțiile $x_1 = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$ și $x_2 = 4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$ **2p**

3. Fie triunghiul ABC și punctele D, E, F, G, H astfel încât $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ED}$ și $\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$. Dreptele GH și AC se intersectează în I , iar BE și AC în J . Arătați că există $k \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AI} = k \cdot \overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{GI} = k \cdot \overrightarrow{HG}$ și $\overrightarrow{BE} = k \cdot \overrightarrow{EJ}$.

Ioana Mașca

Soluție.

$HG \parallel FD$, ca linie mijlocie în triunghiul DEF . Rezultă $\frac{AI}{IC} = \frac{AG}{GD}$ (teorema lui

Thales în $\triangle ACD$, cu $GI \parallel DC$), iar $AG = 3GD$. Obținem $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{IC}$ **2p**

$HG = \frac{1}{2}FD = \frac{1}{4}DC$, iar $\frac{GI}{DC} = \frac{AG}{AD} = \frac{3}{4}$ ($\triangle AGI \sim \triangle ADC$), de unde $GI = 3HG$.

Rezultă $\overrightarrow{GI} = 3\overrightarrow{HG}$ **2p**

Aplicând teorema lui Menelaus, obținem:

$\frac{EB}{EJ} \cdot \frac{AJ}{AC} \cdot \frac{DC}{DB} = 1$ ($\triangle BCJ$, secanta AD) și $\frac{JA}{JC} \cdot \frac{BC}{BD} \cdot \frac{ED}{EA} = 1$ ($\triangle ACD$, secanta BJ).

Obținem $\frac{EB}{EJ} = \frac{AC}{AJ}$ și $\frac{JC}{JA} = 2$. Rezultă $\frac{EB}{EJ} = \frac{AJ + JC}{AJ} = 3$, deci $\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{EJ}$.

Prin urmare, $k = 3$ **3p**

4. Fie a, b, c lungimile laturilor BC, CA, AB ale triunghiului ABC și D, E, F picioarele bisectoarelor unghiurilor A, B , respectiv C . Arătați că dacă

$$(b+c)\overrightarrow{AD} + (c+a)\overrightarrow{BE} + (a+b)\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{0},$$

atunci ABC este un triunghi echilateral.

Gazeta Matematică, Supliment cu Exerciții

Soluție.

Din teorema bisectoarei rezultă $(b+c)\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$. Au loc relații analoage pentru bisectoarele BE și CF **3p**

Înlocuind în relația din enunț, obținem $(b-a)\overrightarrow{AB} + (c-b)\overrightarrow{BC} + (a-c)\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$ **1p**

Din $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, rezultă $(2b-a-c)\overrightarrow{AB} + (2c-a-b)\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$ **1p**

Deoarece vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt necoliniari, avem $2b = a + c$ și $2c = a + b$ **1p**

Rezultă $a = b = c$, deci ABC este un triunghi echilateral..... **1p**