

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2020

Clasa a X-a

1. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 2020x$ și $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g(x) = \left[\frac{x}{2020} \right]$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a .
 - (a) Arătați că $g \circ f = 1_{\mathbb{Z}}$, unde $1_{\mathbb{Z}}$ este funcția identică a mulțimii $\mathbb{Z}$.
 - (b) Este g inversa lui f ? Justificați răspunsul!
2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$2^{-\sin^2 x} + 2^{-\cos^2 x} = \sin x + \cos x.$$

3. Fie n un număr natural nenul fixat. Rezolvați în mulțimea numerelor reale sistemul

$$\begin{cases} \sqrt[2019]{x^n} = y - z \\ \sqrt[2019]{y^n} = z - x \\ \sqrt[2019]{z^n} = x - y \end{cases}$$

4. Se consideră numerele complexe z_1, z_2 și z_3 , distincte două câte două, cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Știind că $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = 3$, calculați $|z_1^{2020} + z_2^{2020} + z_3^{2020}|$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.