OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 22 februarie 2014
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE-CLASA a IX-a

1. Să se determine funcțiile $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ care satisfac relația $\frac{f^2(n)}{n+f(n)}+\frac{n}{f(n)}=\frac{1+f(n+1)}{2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

G.M. 9/2013

Soluție. Notăm $f(1)=k \in \mathbb{N}^*$ și pentru n=1 relația din enunț devine $\frac{k^2}{k+1}+\frac{1}{k}=\frac{1+f(2)}{2} \Leftrightarrow$
$\frac{2k^3+2k+2}{k^2+k}=1+f(2) \Leftrightarrow 2k-2+\frac{4k+2}{k^2+k}=1+f(2) \Rightarrow k^2+k / 4k+2 \Rightarrow k^2+k / 4k^2+2k$ și
$k^2+k / 4k^2+4k$, de unde rezultă $k^2+k / 2k$ și în mod necesar k=1. Deci $f(1)=1$.
Presupunem inductiv că $f(n)=n$ și folosind relația din ipoteză obținem $f(n+1)=n+1$.
În concluzie, singura funcție cu proprietatea dată este $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $f(n)=n, \forall n \geq 1$.

Barem.

Demonstrează că $f(1)=1$ …………………………………………………………………………	4p
Aplică metoda inducției matematice și determină funcția……………………………………	3p

2. Se dă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_n=\frac{x^{n+1}+y^{n+1}}{x^n+y^n}+\frac{y^{n+1}+z^{n+1}}{y^n+z^n}+\frac{z^{n+1}+x^{n+1}}{z^n+x^n}$, unde x, y, z sunt numere reale strict pozitive. Demonstraţi că: $a_{n+1}+a_{n-1} \leq 2a_n, \forall n \geq 2$.

Ion Bursuc, Suceava

Soluție. Este suficient să arătăm: $\frac{x^{n+2}+y^{n+2}}{x^{n+1}+y^{n+1}}+\frac{x^n+y^n}{x^{n-1}+y^{n-1}} \leq \frac{2(x^{n+1}+y^{n+1})}{x^n+y^n}, \forall n \geq 2.$ (1)

Fie $t=\frac{x}{y}$. Inegalitatea de demonstrat devine:

$$\frac{t^{n+2}+1}{t^{n+1}+1}+\frac{t^n+1}{t^{n-1}+1} \leq \frac{2(t^{n+1}+1)}{t^n+1} \Leftrightarrow \frac{t^{n+2}+1}{t^{n+1}+1}-\frac{(t^{n+1}+1)}{t^n+1} \leq \frac{(t^{n+1}+1)}{t^n+1}-\frac{t^n+1}{t^{n-1}+1}.$$

Aducând la același numitor și efectuând calculele obținem:

$$\frac{(t-1)^2}{t^n+1}\left(\frac{t^{n-1}}{t^{n-1}+1}-\frac{t^n}{t^{n+1}+1}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t^{n-1}(t-1)^2}{(t^{n-1}+1)(t^n+1)(t^{n+1}+1)} \cdot (t^{n+1}+1-t^n-t) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$\frac{t^{n-1}(t-1)^2}{(t^{n-1}+1)(t^n+1)(t^{n+1}+1)} \cdot (t^n-1)(t-1) \geq 0$, inegalitate adevărată ținând cont de faptul că expresiile t^n-1 și $t-1$ au același semn, pentru orice $n \geq 2, t>0$.
În mod analog obținem inegalitățile:

$$\frac{y^{n+2}+z^{n+2}}{y^{n+1}+z^{n+1}}+\frac{y^n+z^n}{y^{n-1}+z^{n-1}} \leq \frac{2(y^{n+1}+z^{n+1})}{y^n+z^n} \quad (2)$$

$$\frac{x^{n+2}+z^{n+2}}{x^{n+1}+z^{n+1}}+\frac{x^n+z^n}{x^{n-1}+z^{n-1}} \leq \frac{2(x^{n+1}+z^{n+1})}{x^n+z^n} \quad (3)$$

Adunând inegalităţile (1), (2) şi (3) obţinem inegalitatea din enunţ. Egalitatea are loc când numerele x,y,z sunt egale.

Barem.

Demonstrează inegalitatea $\frac{x^{n+2}+y^{n+2}}{x^{n+1}+y^{n+1}}+\frac{x^n+y^n}{x^{n-1}+y^{n-1}} \leq \frac{2(x^{n+1}+y^{n+1})}{x^n+y^n}, \forall n \geq 2.$ ……………	6p
Finalizare…………………………………………………………………	1p

3. Fie ABCD un patrulater și punctele M,N,P,Q astfel încât $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{DP}=\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{DQ}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

Să se arate că dreapta MP trece prin mijlocul segmentului $[NQ]$.

***

Soluție. a) Din relațiile vectoriale deducem că punctele M și P sunt mijloacele segmentelor [AB], respectiv [CD], iar $\overrightarrow{BN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

Considerăm S mijlocul segmentului [NQ] și avem $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{MS}$ (1)

Dar $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$ (2)

Mai putem scrie: $2\overrightarrow{MP}=\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}\right)+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}\right)=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$ (3)

Din relațiile (1), (2) și (3) deducem $\overrightarrow{MS}\parallel\overrightarrow{MP}$, deci punctul S aparține segmentului [MP].

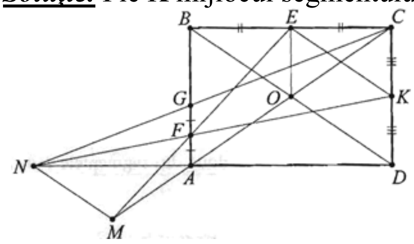
Barem.

a) Figura ……………………………………………………..………………………………	1p
$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{MS}$ ………………………………………………………………………	1p
Deduce relația (2)……………………………………………………………………….	2p
Deduce relația (3)……………………………………………………………………….	2p
Finalizare……………………………………………………………………………….	1p

4. În dreptunghiul ABCD punctul E este mijlocul laturii BC, iar punctele diferite F și G aparțin segmentului [AB], astfel că AF=FG. Dreptele EF și CG intersectează dreptele AC, respectiv AD în punctele M și respectiv N. Să se demonstreze că dreptele MN și BD sunt paralele.

***

Soluție. Fie K mijlocul segmentului [CD] și O centrul dreptunghiului.



Din $\triangle NAG \sim \triangle NDC$ rezultă $\frac{AG}{DC}=\frac{NA}{ND} \Leftrightarrow \frac{AF}{DK}=\frac{NA}{ND}$. Deducem că $\triangle NAF \sim \triangle NDK$ și atunci punctele N, F, K sunt coliniare și $\frac{NF}{NK}=\frac{AG}{CD}$ (1).

$OE \parallel AB \Rightarrow \triangle MFA \sim \triangle MEO \Rightarrow \frac{MF}{ME}=\frac{AF}{OE} \Rightarrow \frac{MF}{ME}=\frac{AG}{CD}$ (2).

Din relațiile (1) și (2) rezultă $\frac{NF}{NK}=\frac{MF}{ME} \Leftrightarrow \frac{NF}{FK}=\frac{MF}{FE}$, de unde $\triangle MFN \sim \triangle EFK$, deci $KE \parallel MN$ (3)

Cum [KE] este linie mijlocie în triunghiul CDB avem $KE \parallel BD$ (4)

Din relațiile (3) și (4) obținem concluzia.

Barem.

Demonstrează că punctele N, F, K sunt coliniare ………………………….	2p
$\frac{NF}{NK}=\frac{AG}{CD}$ (1) ………………………………………………………......	1p
Determină relația (2).……………………….……………………………..	1p
Demonstrează $KE \parallel MN$ ……………………………………..………….	2p
Finalizare ……………………………………………………………....	1p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.