



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, Județul Dolj, 08 februarie 2025
CLASA a X-a - Soluții și bareme

Problema 1.	
a) $a^{(\log_3 10)^2} + b^{(\log_5 10)^2} + c^{(\log_{15} 5)^2} = 27^{\log_3 10} + 125^{\log_5 10} + 225^{\log_{15} 5} =$	1p
$10^3 + 10^3 + 5^2 = 2025$	1p
b) Notând $\log_a n = x$ avem $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$ (1) și $ax = 1 + x$ (2).	1p
Ecuția (1) are soluțiile $x = 0$ și $x = 4$.	1p
Dacă $x = 0$, atunci (2) devine $0 = 1$ ceea ce este imposibil.	1p
Dacă $x = 4$, atunci din (2) găsim $a = \frac{5}{4}$ și $n = \frac{625}{256}$	1p
deci $p = 625$ și $q = 256$, iar $\sqrt{p} + \sqrt[4]{p^3} \cdot \sqrt{q} = 25 + 125 \cdot 16 = 2025$	1p
Problema 2.	
Notând $x = \lg a, y = \lg b, z = \lg c, t = \lg d$ inegalitatea devine $\frac{x}{y+z+t-x} + \frac{y}{x+z+t-y} +$	2p
$\frac{z}{x+y+t-z} + \frac{t}{x+y+z-t} \geq 2$, iar $x, y, z, t > 0$.	
Dacă înmulțim relația cu 2 și adunăm 4 aceasta devine echivalentă cu	
$(x + y + z + t) \left(\frac{1}{y + z + t - x} + \frac{1}{x + z + t - y} + \frac{1}{x + y + t - z} + \frac{1}{x + y + z - t} \right) \geq 8 (*)$	3p
Deoarece produsul a oricăror trei dintre numerele a, b, c, d este mai mare decât al patrulea atunci numerele $y + z + t - x, x + z + t - y, x + y + t - z, x + y + z - t$ sunt pozitive.	1p
Aplicând inegalitatea mediilor $m_a \geq m_h$ pentru aceste patru numere se obține	
$2(x + y + z + t) \left(\frac{1}{y + z + t - x} + \frac{1}{x + z + t - y} + \frac{1}{x + y + t - z} + \frac{1}{x + y + z - t} \right) \geq 16$	1p
deci (*) este adevărată.	
Problema 3.	
Deoarece $ z_1 = z_2 = z_3 = 1$ atunci $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}, \bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}, \bar{z}_3 = \frac{1}{z_3}$.	1p
Conjugând relația $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$, obținem $\frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_3} = 1$, deci $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_1}{z_3}$.	3p
Eliminând numitorii obținem egalitatea $z_1^2 \cdot z_3 + z_2^2 \cdot z_1 + z_3^2 \cdot z_2 = z_1^2 \cdot z_2 + z_2^2 \cdot z_3 + z_3^2 \cdot z_1$, care este echivalentă cu $(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1) = 0$	
Dacă $z_1 = z_2$, atunci $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$, adică $z_3^2 = -z_1^2$. Obținem că $z_3 \in \{iz_1, -iz_1\}$, de	

unde $E = \left \frac{z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_3} + \frac{3z_3}{z_1} \right \in \{ 1 - 2i + 3i , 1 + 2i - 3i \}$, deci $E = \sqrt{2}$.	1p
Dacă $z_1 = z_3$, atunci $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$, adică $z_2^2 = -z_1^2$. Obținem că $z_2 \in \{iz_1, -iz_1\}$, de unde $E = \left \frac{z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_3} + \frac{3z_3}{z_1} \right \in \{ -i + 2i + 3 , i - 2i + 3 \}$, deci $E = \sqrt{10}$.	1p
Dacă $z_2 = z_3$, atunci $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$, adică $z_1^2 = -z_2^2$. Obținem că $z_1 \in \{iz_2, -iz_2\}$, de unde $E = \left \frac{z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_3} + \frac{3z_3}{z_1} \right \in \{ i + 2 - 3i , -i + 2 + 3i \}$, deci $E = \sqrt{8}$. Astfel, valoarea maximă a lui E este $\sqrt{10}$.	1p
Problema 4.	
Pentru $y = 0$ se obține că $f(0) \geq f(x^3)$ oricare ar fi x număr real. Pentru orice $y \in \mathbb{R}$ există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $y = x^3$ și din (1) avem că $f(0) \geq f(y)$ (1).	2p
Dacă $y = -x$ se obține $f(2x) + f(-x) \geq f(0) + f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (2). Dacă înlocuim în (2) pe x cu $-x$ se obține $f(-2x) + f(x) \geq f(0) + f(-x)$ (3) și adunând relațiile (2) și (3) găsim	2p
$f(2x) + f(-2x) \geq 2f(0)$ (4).	1p
Dacă înlocuim în (4) pe x cu $\frac{x}{2}$ și folosim (1) se obține $f(x) + f(-x) = 2f(0)$.	
Dacă există a pentru care $f(a) < f(0)$ atunci $f(-a) > f(0)$ ceea ce contrazice (1). Deci $f(x)$ este constantă.	2p