



Olimpiada națională de matematică

etapa locală

28.02.2015

Clasa a X-a

1.

a) Să se arate că $\lg^2(xy) \leq 2(\lg^2 x + \lg^2 y)$, $\forall x, y \in (1, \infty)$

b) Fie $x, y, z, t \in (1, \infty)$ astfel încât $\lg(xy)\sqrt{\lg z \lg t} + \lg(zt)\sqrt{\lg x \lg y} = 4$. Să se arate că $\lg^2 x + \lg^2 y + \lg^2 z + \lg^2 t \geq 4$.

2. Fie $ABCDEF$ un hexagon inscriptibil și H_1, H_2, H_3, H_4 respectiv ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, DEF, EFA . Să se arate că patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

3.

a) Să se arate că funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{x} + \log_{2015} x$ este injectivă.

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt{x}}} - \sqrt[6]{(2014-x)\sqrt{2014-x}} = \log_{2015}\left(\frac{2014}{x} - 1\right)$.

4.

a) Să se arate că $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

b) Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2|$ și $3|z_1 + z_2| \geq |5z_1 + z_2|$. Să se arate că $z_1 = z_2$.

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

SUCCES!