Ministerul Educaţiei Naţionale
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 9 Martie 2013
CLASA a IX-a – Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. a) Demonstraţi că, oricare ar fi numărul real x, are loc inegalitatea

$$x^4 - x^3 - x + 1 \geq 0.$$

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \end{cases}$.

Soluţie. a) $x^4 - x^3 - x + 1 = (x-1)(x^3-1) = (x-1)^2(x^2+x+1)$ **2p**

$x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde concluzia **2p**

b) Din a) rezultă că relaţia de egalitate obţinută prin adunarea ecuaţiilor este posibilă numai dacă $x_k^4 - x_k^3 - x_k + 1 = 0$, $k = 1, 2, 3$, deci singura soluţie a sistemului este $(1, 1, 1)$ **3p**

Problema 2. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $D, E \in (BC)$, $F, G \in (CA)$, $H, I \in (AB)$ astfel încât $BD = CE$, $CF = AG$ şi $AH = BI$. Notăm cu M, N, P mijloacele segmentelor $[GH]$, $[DI]$, respectiv $[EF]$ şi cu M' intersecţia dreptelor AM şi BC.

a) Arătaţi că $\dfrac{BM'}{CM'} = \dfrac{AG}{AH} \cdot \dfrac{AB}{AC}$.

b) Arătaţi că dreptele AM, BN şi CP sunt concurente.

Soluţie. a) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2}\dfrac{AH}{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\dfrac{AG}{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$ **2p**

$\overrightarrow{AM'} = \dfrac{1}{m+1}\overrightarrow{AB} + \dfrac{m}{m+1}\overrightarrow{AC}$, unde $m = \dfrac{BM'}{CM'}$ **1p**

A, M, M' coliniare $\Leftrightarrow \dfrac{AH}{AB} \cdot \dfrac{m}{m+1} = \dfrac{AG}{AC} \cdot \dfrac{1}{m+1}$, de unde cerinţa **1p**

b) Dacă definim analog punctele N', P', atunci din a) reiese $\dfrac{BM'}{CM'} \cdot \dfrac{CN'}{AN'} \cdot \dfrac{AP'}{BP'} = 1$ şi, aplicând reciproca teoremei lui Ceva, obţinem concluzia. **3p**

Problema 3. Fie n un număr natural nenul şi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale astfel încât $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \leq k$, oricare ar fi $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Demonstraţi că

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Soluţia 1. Demonstrăm prin inducţie. Cazul $n = 1$ se verifică imediat. **1p**

Presupunem acum că relaţia este adevărată pentru orice n numere şi o demonstrăm pentru $n+1$ numere $a_1, \ldots, a_{n+1}$.

Dacă $a_{n+1} \leq 1$ atunci $\dfrac{a_{n+1}}{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1}$ şi demonstraţia se încheie aplicând ipoteza de inducţie numerelor $a_1, \ldots, a_n$ **2p**

Dacă $a_{n+1} > 1$, atunci $\dfrac{a_1}{1} + \ldots + \dfrac{a_n}{n} + \dfrac{a_{n+1}}{n+1} \leq \dfrac{a_1}{1} + \ldots + \dfrac{a_n + a_{n+1} - 1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$ şi demonstraţia se încheie aplicând ipoteza de inducţie celor n numere $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + a_{n+1} - 1$ **4p**

Soluţia 2. Fie $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. Observăm că $S_{k+1} - S_k = a_{k+1}$ **1p**

Avem

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{k}$$

unde $S_0 = 0$. **1p**

Deducem

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k(k+1)}.$$

.... **3p**

iar din ipoteză că $A_n \leq \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$ **2p**

Problema 4. Pe o hârtie este scrisă la început o listă de numere naturale distincte. O *continuare a listei* înseamnă alegerea a două numere dintre cele existente şi scrierea pe listă a celui mai mic multiplu comun al acestora, cu condiţia ca el să nu fie deja scris. Spunem că lista *s-a închis* dacă nu

Soluţie. Numărul maxim este $2^{10}-1$. **1p**

O listă cu $2^{10}-1$ numere se obţine, de exemplu, pornind cu 10 numere prime distincte şi formând la început multiplii comuni cu 2 factori, apoi cei cu trei factori, apoi cei cu patru factori, etc (formăm, de fapt, toate cele $2^{10}-1$ submulţimi cu cel puţin un element ale mulţimii $\{1,2,\ldots,10\}$). **3p**

Nu se pot obţine mai mult de $2^{10}-1$ numere, deoarece fiecare continuare conduce la obţinerea celui mai mic multiplu comun a câtorva dintre numerele iniţiale, deci fiecare număr de pe listă corespunde alegerii unei submulţimi cu cel puţin un element a mulţimii $\{1,2,\ldots,10\}$ **3p**