Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

22 februarie 2015

Clasa a XII-a

Problema 1.

Fie funcţia $f:\mathbb{Z}_9 \to \mathbb{Z}_9,\ f(x)=x^2.$ Să se determine submulţimile nevide A ale mulţimii $\mathbb{Z}_9$ cu proprietatea $f(A)=A.$

Problema 2.

Se consideră numerele reale a şi b şi funcţia continuă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ cu proprietatea că $\int_{at}^{bt} f(x)dx \le \int_a^b f(x)dx,$ oricare ar fi $t\in(0,2).$ Să se arate că $a\cdot f(a)=b\cdot f(b).$

Problema 3.

Fie $n\in\mathbb{N},\ n\ge 2$ fixat şi mulţimile $\mathrm{H}_1=\left\{A\in M_n(\mathbb{R}) / A^t=A\right\}$ şi $\mathrm{H}_2=\left\{A\in M_n(\mathbb{R}) / A^t=-A\right\}.$

a).Să se demonstreze că H_1 şi H_2 sunt subgrupuri ale grupului $\left(M_n(\mathbb{R}),+\right).$

b).Să se demonstreze că $(\forall)\mathrm{X}\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),$ există $\mathrm{A}\in\mathrm{H}_1$ şi $\mathrm{B}\in\mathrm{H}_2$ astfel încât $\mathrm{X}=\mathrm{A}+\mathrm{B}.$

Problema 4.

Fie funcţia $f:(-1,2\pi]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{-x}{x+1}}+c & ,\ x\in(-1,0]\\ \dfrac{1}{4+\sin x}, & x\in(0,2\pi]\end{cases},\quad c\in\mathbb{R}$

Să se determine $c\in\mathbb{R},$ astfel încât funcţia f să admită primitive şi să se calculeze o primitivă a sa.