



Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

Clasa a X-a

Subiectul 1.

a) Calculați $(\sqrt{5} - 1)^3$.

b) Determinați câte numere naturale nenule n verifică inegalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}} < 1 - 2\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}.$$

Soluție și barem

a) $(\sqrt{5} - 1)^3 = 8\sqrt{5} - 16$ 1p

b) Se amplifică fiecare fracție din membrul stâng cu expresia conjugată și după reducerea termenilor se obține inegalitatea: $\sqrt[3]{n+1} - 1 < 1 - 2\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$2p

Din a) inegalitatea se mai poate scrie: $\sqrt[3]{n+1} < 1 + \sqrt{5}$1p

Prin ridicare la cub urmează că $n < 15 + 8\sqrt{5}$1p

Cum $15 + 8\sqrt{5} \in (32, 33) \Rightarrow n \in \{1, 2, \dots, 32\}$, deci sunt 32 numere.....2p

Subiectul 2. Dacă $a_k \in (0, 1)$, $k = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, demonstrați inegalitatea:

$$\log_{a_1} \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} + \log_{a_2} \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} + \dots + \log_{a_n} \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \geq n.$$

Soluție și barem

Se aplică inegalitatea dintre media armonică și media geometrică obținându-se n inegalități:

$$\log_{a_i} \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \geq \log_{a_i} \frac{n}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}} = \frac{\log_{a_i} (a_1 a_2 \dots a_n)}{n}, i = \overline{1, n} \dots\dots\dots 2p$$

Prin adunare membru cu membru se obține:

$$\log_{a_1} \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} + \log_{a_2} \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} + \dots + \log_{a_n} \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \geq \frac{n + (\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_1) + \dots + (\log_{a_n} a_{n-1} + \log_{a_{n-1}} a_n)}{n} \dots\dots\dots 2p$$

Aplicând inegalitatea $\log_{a_j} a_i + \log_{a_i} a_j \geq 2$ pentru toate parantezele din expresia anterioară se obține

$$\log_{a_1} \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} + \log_{a_2} \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} + \dots + \log_{a_n} \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \geq \frac{n + (n-1) \cdot 2 + (n-2) \cdot 2 + \dots + 2}{n} \text{ și în continuare rezultă inegalitatea cerută.} \dots\dots\dots 2p$$



Semnul „=” are loc dacă și numai dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ 1p

Subiectul 3. a) Dacă $a, z, z' \in \mathbb{C}$, arătați că $|z+a| + |z'+a| \geq |z-z'|$.

b) Dacă $a, z \in \mathbb{C}, |z|=1, n \in \mathbb{N}^*$, arătați că $\sum_{k=1}^{2n} |z^k + a| \geq n|z-1|$.

Soluție și barem

a) $|z| = |-z| \Rightarrow |z+a| + |z'+a| \geq |z+a| + |-z'-a|$ 2p

$|z+a| + |z'+a| \geq |z+a-z'-a| = |z-z'|$ 1p

b) $\sum_{k=1}^{2n} |z^k + a| = |z^{2n} + a| + |z^{2n-1} + a| + \dots + |z^2 + a| + |z + a|$ 1p

$\sum_{k=1}^{2n} |z^k + a| \geq |z^{2n} - z^{2n-1}| + \dots + |z^2 - z|$ 1p

$\sum_{k=1}^{2n} |z^k + a| \geq (|z^{2n-1}| + |z^{2n-3}| + \dots + |z|)|z-1| = n|z-1|$ 2p

Subiectul 4. Fie A un punct al cercului cu centrul în originea reperului cartezian xOy și de rază 1, astfel încât $\mu(\widehat{xOA}) = \frac{\pi}{6}$.

a) Determinați ecuația binomă de grad minim, având coeficienți reali, pentru care una dintre rădăcini să fie afixul punctului A ;

b) Aflați aria poligonului cu vârfurile A_k , unde A_k sunt imaginile geometrice ale ecuației de la punctul a).

Soluție și barem

a) $A(a)$ și $z^n = b, a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*. a = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$ și $a^n = b$ 1p

$\cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} = b \in \mathbb{R} \Rightarrow \overset{\sin}{\sqrt[n]{n\pi}} = 0 \Rightarrow n = 6k, k \in \mathbb{N}^*$ 2p

$n = 6, b = -1$, deci ecuația este $z^6 + 1 = 0$ 1p

b) $A_k(z_k), z_k = \cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{6}, k = 0, 5, A_0 A_1 \dots A_5$ hexagon regulat 1p

$\mathcal{A}[A_0 A_1 \dots A_5] = 6\mathcal{A}[OA_0 A_1] = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 2p

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.