

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

1. a) Să se arate că expresia $(x^2 - 5x + 3) \cdot (x^2 - 5x + 9) + 9$ este pătrat perfect
 b) Fie expresia $A(x, y) = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{y^2 - 6y + 10}$ unde x și y sunt numere reale. Să se determine valoarea minimă a expresiei $A(x, y)$!

Rezolvare

- a) Fie $x^2 - 5x + 3 = a$, atunci $x^2 - 5x + 9 = a + 6$ 2 p
 Expresia se scrie $(x^2 - 5x + 3) \cdot (x^2 - 5x + 9) + 9 = a \cdot (a + 6) + 9 = a^2 + 6a + 9 = (a + 3)^2$ 2 p
 b) $A(x, y) = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{y^2 - 6y + 10} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 4} + \sqrt{y^2 - 6y + 9 + 1} =$ 2 p
 $= \sqrt{(x - 3)^2 + 4} + \sqrt{(y - 3)^2 + 1} \geq \sqrt{0 + 4} + \sqrt{0 + 1} = 2 + 1 = 3$ 2 p
 $\Rightarrow$ valoarea minimă a expresiei $A(x, y)$ este 3. 1 p

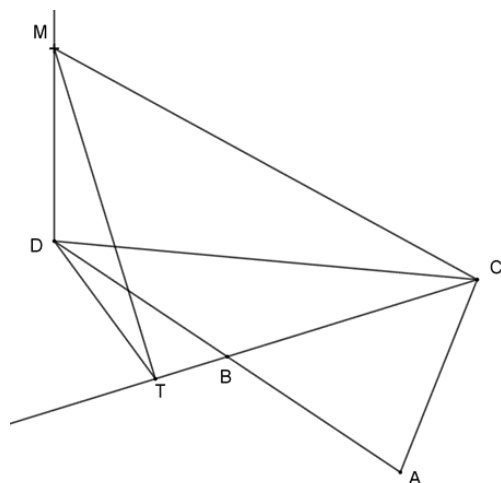
2. Demonstrați că dacă $a, b \in \mathbf{R}_+$, $b - a = 4$ și $(a, b) \cap \mathbb{Z} = \{n - 1, n, n + 1\}$ atunci $\sqrt{a^2 + b^2 + 8} > \frac{2\sqrt{3}}{3}(n + 2)$

Rezolvare

- $(a, b) \cap \mathbb{Z} = \{n - 1, n, n + 1\} \Rightarrow n - 2 \leq a$ și $b \leq n + 2$ 1,5 p
 $b - a = 4, n - 2 \leq a$ și $b \leq n + 2 \Rightarrow a = n - 2$ și $b = n + 2$ 1,5 p
 $\sqrt{a^2 + b^2 + 8} > \frac{2\sqrt{3}}{3}(n + 2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 8 > \frac{4 \cdot 3}{9}(n + 2)^2 \Leftrightarrow$ 1 p
 $\Leftrightarrow (n - 2)^2 + (n + 2)^2 + 8 > \frac{4}{3}(n^2 + 4n + 4) \Leftrightarrow 2n^2 + 16 > \frac{4}{3}(n^2 + 4n + 4) \Leftrightarrow$ 1 p
 $\Leftrightarrow 3n^2 + 24 > 2n^2 + 8n + 8 \Leftrightarrow$ 2 p
 $\Leftrightarrow n^2 - 8n + 16 > 0 \Leftrightarrow (n - 4)^2 > 0$ 2 p

3. Fie ABC un triunghi echilateral și punctul D simetricul lui A față de B . Pe perpendiculara pe planul triunghiului ABC în punctul D luăm punctul M astfel încât $MD = BD = a$ ($a > 0$). Calculați distanța de la punctul M la laturile triunghiului.

Rezolvare



- $MD \perp (ABC), AB \subset (ABC) \Rightarrow MD \perp AB \Rightarrow d(M, AB) = MD = a$ 1 p
 În triunghiul ACD $AB = BD = BC = a \Rightarrow m(\angle ACD) = 90^\circ \Rightarrow CD = a\sqrt{3}$ 1 p
 $MD \perp (ABC), CD \perp AC \Rightarrow MC \perp AC \Rightarrow d(M, AC) = MC = 2a$ 2 p

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

Fie $DT \perp BC, T \in BC$

$DT \perp BC, MD \perp (ABC) \Rightarrow MT \perp BC \Rightarrow d(M, BC) = MT$ Intersecția celor două plane este.1 p

$m(\angle DBT) = 30^\circ, m(\angle BTD) = 90^\circ \Rightarrow BT = \frac{BD}{2} = \frac{a}{2}$ 2 p

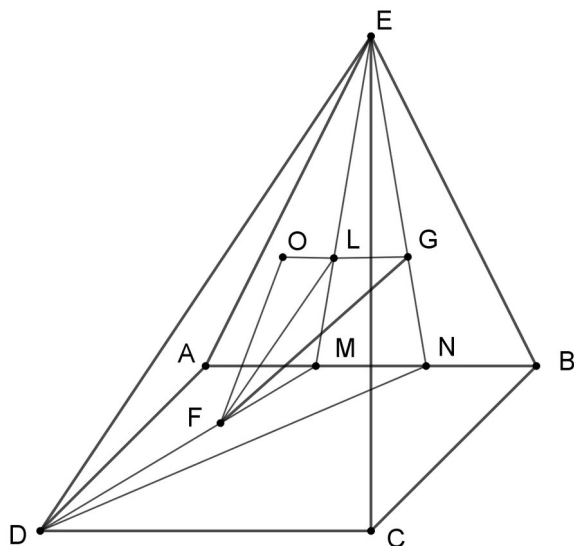
$CT = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ și $d(M, BC) = MT = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ 2 p

4. Pătratul ABCD și triunghiul echilateral ABE sunt în plane diferite. Fie punctele M și N pe latura AB astfel încât $AM = MN = NB$, iar G și F centrele de greutate ale triunghiurilor EMB respectiv DAN.

a) Să se demonstreze că FG este paralel cu planul CDE

b) Să se determine lungimea segmentului FG, dacă $AB = 18\text{cm}$ și măsura unghiului format de dreptele AB și DE este egal cu măsura unghiului format de dreptele AD și CE.

Rezolvare



a) Fie $L \in (EM)$ a.î. $\frac{ML}{ME} = \frac{1}{3}, \frac{NG}{NE} = \frac{1}{3} = \frac{ML}{NE} \Rightarrow LG \parallel MN \Rightarrow LG \parallel CD \Rightarrow LG \parallel (CDE)$ (1)1 p

La fel $LF \parallel ED \Rightarrow LF \parallel (CDE)$ (2)1 p

Din (1) și (2) rezultă $(LGF) \parallel (CDE) \Rightarrow FG \parallel (CDE)$ 1 p

b) Din ip. $\Rightarrow \angle EDC \equiv \angle ECB, ED = EC, DC = BC \Rightarrow \triangle EDC \equiv \triangle ECB$ și sunt echilaterale $\Rightarrow ED = DC = 18$ 1 p

$\frac{FL}{DE} = \frac{1}{3} \Rightarrow FL = 6$ 1 p

$\frac{LG}{MN} = \frac{EG}{EN} = \frac{2}{3} \Rightarrow LG = 4$ 1 p

$\angle EDC$ și $\angle GLF$ sunt unghiuri cu laturi paralele, $\angle EDC = 60^\circ \Rightarrow \angle GLF = 120^\circ$ 1 p

Fie $FO \perp LG \Rightarrow \angle OLF = 60^\circ \Rightarrow \angle OFL = 30^\circ \Rightarrow OL = \frac{FL}{2} = 3$ 1 p

Din triunghiul $OLF \Rightarrow OF = 3\sqrt{3}$ 0,5 p

Din triunghiul $OGF \Rightarrow FG = 2\sqrt{19}$ 0,5 p