



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ – 25 IANUARIE 2014

Clasa a X-a

Problema 1. a) Arătați că $\log_a \sqrt{x} + \log_{a^2} \sqrt[3]{x} + \log_{a^3} \sqrt[4]{x} + \dots + \log_{a^n} \sqrt[n+1]{x} = \log_a \sqrt[n+1]{x^n}$; $\forall a, x \in (0, \infty)$, $a \neq 1$.

b) Determinați partea întreagă a numărului $N = \log_{2013} 2014 + \log_{2014} 2013 + 2013^{\log_{2014} 2015} - 2015^{\log_{2014} 2013}$.

Adriana Constantin, Călărași

Problema 2. a) Arătați că, pentru oricare două numere complexe z_1, z_2 , egalitatea $|z_1| + |z_2| = |z_1 + z_2|$ este adevărată dacă și numai dacă $\exists \alpha \in (0, \infty)$ astfel încât $z_1 = \alpha z_2$.

b) Determinați mulțimile $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 + 2z + 2| + |z^2 + 2z + 1| = 1\}$ și $M = \{\operatorname{Re} z \mid z \in A\}$.

Viorica Stoianovici, Călărași

Problema 3. a) Dacă $a \in (0, +\infty)$ arătați că $\left\{ \sqrt[3]{1+a^x} + \sqrt[3]{1-a^x} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subset (0, 2)$.

b) Dacă $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ arătați că $\frac{1}{2\sqrt[n]{1}} + \frac{1}{3\sqrt[m]{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt[n]{n}} < m$.

Problema 4. Fie numerele complexe distincte a, b, c astfel încât $(a+b)^3 = (b+c)^3 = (c+a)^3$. Să se arate că $a^3 = b^3 = c^3$.

Gazeta Matematică

SUCCES!

Baremul de notare este: **Problema 1.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 2.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 3.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 4.** 7 puncte.