



Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapă locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA A IX A

Problema 1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|x^2 - 3x + 2| = \left| \left| x - \frac{1}{3} \right| - \frac{2}{3} \right|, \quad x \in \mathbf{R};$

b) $\left[\frac{n-1}{2} \right] + \left[\frac{n^2-n}{3} \right] = n, \quad n \in \mathbb{Z},$ unde $[x]$ este partea întreagă a numărului x .

Problema 2. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n, a > 0$ cu $\sum_{i=1}^n x_i = a$. Dacă $x_1 = x_{n+1}$, arătați că:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^3}{x_i^2 + x_{i+1}^2} \leq \frac{a}{2}$$

Problema 3. Fie $\triangle ABC$ cu G și I centrul de greutate, respectiv centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, iar M un punct în planul triunghiului. Să se demonstreze:

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 \cdot \overrightarrow{MG}$

b) $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c) \cdot \overrightarrow{MI}$, cu notațiile $a = BC, b = AC, c = AB$.

c) Dacă $\vec{v} = a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}$ și $\vec{u} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$, să se arate că vectorii $\vec{v}$ și $\vec{u}$ sunt coliniari și $3 \cdot |\vec{v}| = (a+b+c) \cdot |\vec{u}|$

Problema 4. Pe laturile $[AB], [BC], [CD], [DA]$ ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N, P și respectiv Q .

a) Arătați că $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP}$ este colinar cu $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$ este colinar cu $\overrightarrow{BD}$.

b) Indicați 4 puncte M, N, P, Q pentru care echivalența de la punctul a) are loc.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.