



MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România,
Filiala Caraș - Severin



Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 10.02.2024

Clasa a X-a

Subiecte

()

Problema 1. Arătați că, dacă $a = \log_{45} 25$ și $b = \log_{15} 27$, , atunci $c = 3a + ab + 2b$ este număr natural.

(Supliment GM 10/2023)

Problema 2. (a) Arătați că numărul $\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$ este rațional.

(b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x-4} + \sqrt[3]{x+4} = 2$.

(Concurs ViitoriOlimpici.ro, 2022)

Problema 3. Se notează cu α o soluție complexă a ecuației $z^2 - z + 1 = 0$.

(a) Determinați numărul natural p știind că α este o soluție și a ecuației $x^{76} - x^{96} - x^{17} + p = 0$.

(b) Arătați că, dacă $n \in \mathbb{N}$ și $\alpha^{4n} + \alpha^{2n} + 1 = 0$, atunci n nu este divizibil cu 3.

(Supliment GM 10/2023)

Problema 4. (a) Dați un exemplu de mulțimi $A, B \subset \mathbb{R}$ pentru care funcția

$f : A \rightarrow B, f(x) = x^2 - 6x + 5$ este injectivă, dar nu este surjectivă și un exemplu de mulțimi $C, D \subset \mathbb{R}$ pentru care funcția $g : C \rightarrow D, g(x) = x^2 - 6x + 5$ este surjectivă, dar nu este injectivă.

(b) Demonstrați că funcția $h : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}, h(n) = \log_{n+1} n$ este o funcție strict crescătoare.

(c) Calculați partea întreagă a numărului real $t = \log_3 2 + \log_4 3$.

(Supliment GM 11/2023)