

**Concurs de Matematică Aplicată
„ADOLF HAIMOVICI”**

Etapă Locală Dâmbovița

17-02-2019

Clasa a X-a

Filiera tehnologică: toate profilurile

BAREM DE CORECTARE

1. Demonstrați că $\log_2(a + b) - 1 \geq \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$, $(\forall) a, b > 0$.

Rezolvare:

Inegalitatea mediilor 2p

$\log_2\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \log_2 \sqrt{ab}$ 2p

Finalizare 3p

2. Dacă $x = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$, arătați că $x^3 - 3x - 18 = 0$

Rezolvare:

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}\right)^3 +$$

$$+ 3\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} \left(\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}\right) \dots\dots\dots 3p$$

$$\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} = 1 \dots\dots\dots 2p$$

Finalizare 2p

3. Se consideră expresia $E(x, y) = \left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y} + \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}y} \right) \cdot \frac{(x^3y)^{\frac{1}{2}}}{x+y} + \frac{2y}{y-x}$, unde

$x, y > 0$, distincte.

Calculați $E(\sqrt{2019}, \sqrt[3]{2019})$.

Rezolvare:

$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ și analoagele 2p

$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y} + \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}y} \right) = \frac{2(x+y)}{\sqrt{xy}(x-y)}$ 2p

$E(x, y) = 2$ 2p

Finalizare..... 1p

4. Fie $z \in \mathbb{C}$ un număr complex astfel încât $z^2 + 3z + 9 = 0$.

a) Arătați că z^3 este număr real;

b) Calculați z^{2019} .

Rezolvare:

a) $(z - 3)(z^2 + 3z + 9) = z^3 - 3^3$ 3p

$z^3 = 27$ 1p

b) $z^{2019} = (z^3)^{673}$2p

Finalizare 1p