

Barem de corectare OLM Clasa a IX-a 2016

1. Notăm $[x] = a \in \mathbb{Z}, \{x\} = b$ deci $x = a + b$ și ecuația devine :

$$b^2 + 12b = 10a - 9 \dots\dots\dots (1p)$$

$$b \in [0,1), \text{ deci } 0 \leq 10a - 9 \leq 13, \text{ de unde } a \in \{1, 2\} \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{Pentru } a = 1 \text{ se obține } b = \sqrt{37} - 6, \text{ deci } x = \sqrt{37} - 5 \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{Pentru } a = 2 \text{ se obține } b = \sqrt{47} - 6, \text{ deci } x = \sqrt{47} - 5 \dots\dots\dots (2p)$$

2. a) Presupunem $a \leq b \leq c$, deci $a^2 \leq b^2 \leq c^2$. Folosind inegalitatea lui Cebâșev obținem:

$$a^3 + b^3 + c^3 = a \cdot a^2 + b \cdot b^2 + c \cdot c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq \dots\dots\dots (1p)$$

$$\geq \frac{1}{3}(a+b+c)(ab+ac+bc) = \frac{1}{3}(a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3) \dots\dots\dots$$

(1p)

$$\text{Rezultă } a+b+c \leq 3 \dots\dots\dots (1p)$$

b) Folosind rezultatul de la punctul precedent avem:

$$9 \geq (a+b+c)^2 \geq 3(ab+ac+bc) = 3(a^3 + b^3 + c^3) \dots\dots\dots (2p)$$

$$\text{Rezultă } a^3 + b^3 + c^3 \leq 3 \dots\dots\dots (2p)$$

3. „ $\Rightarrow$ ” Dacă $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este progresie geometrică atunci: $a_1 a_n = a_2 a_{n-1} = \dots = a_n a_1 \dots\dots\dots$

(2p)

$$\text{Dacă } P = a_1 a_2 \dots a_n, \text{ atunci } P^2 = \underbrace{(a_1 a_n)(a_2 a_{n-1}) \dots (a_1 a_n)}_n = (a_1 a_n)^n \Rightarrow P = \sqrt[n]{(a_1 a_n)^n} \dots\dots\dots (2p)$$

„ $\Leftarrow$ ” Notăm $\frac{a_2}{a_1} = r$ și $P(n) : a_1, a_2, \dots, a_n$ în progresie geometrică de rație $r \dots\dots\dots$

(1p)

Scriind egalitatea din enunț pentru $n=3$ se obține $a_2^2 = a_1 a_3 \Rightarrow a_1, a_2, a_3$ sunt în progresie geometrică de rație r , deci $P(3)$ este adevărată $\dots\dots\dots (1p)$

Pentru $n \geq 3$ presupunem $P(n)$ adevărată, deci $a_n = a_1 r^{n-1}$. Împărțim egalitatea din ipoteză pentru $n+1$ termeni la cea pentru n termeni și obținem $a_{n+1} = a_n r = a_1 r^n$, deci $P(n+1)$ este adevărată. Astfel, $P(n)$ este adevărată $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, deci $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este progresie geometrică $\dots\dots\dots (1p)$

4. G este centrul de greutate al patrulaterului $ABCD$, deci $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \dots\dots\dots (2p)$

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GG_1} \dots\dots\dots (2p)$$

$$\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_1} = \vec{0} \dots\dots\dots (1p)$$

Rezultă că vectorii $\overrightarrow{GA}$ și $\overrightarrow{GG_1}$ sunt coliniari, deci $G \in G_1 A \dots\dots\dots (1p)$

Analog se arată că și celelalte drepte trec prin G , deci cele patru drepte sunt concurente ... **(1p)**