

BAREM DE CORECTARE

etapa locală - 22 februarie 2015

Clasa a IX- a

SUBIECTUL I

- a) Inegalitatea este echivalentă cu $\frac{(ab+1)^2}{ab} \leq \frac{(a^2+1)(b^2+1)}{ab}$ (1p)
 $\Leftrightarrow a^2b^2 + 2ab + 1 \leq a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ (adevărat)..... (2p)
- b) Observația $\prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n b_k$ (1p)
 Inegalitatea este echivalentă cu $\prod_{k=1}^n (a_k b_k + 1) \leq \prod_{k=1}^n (a_k^2 + 1)$ (1p)
 Analog ca la pct. a) se obține $(a_k b_k + 1)^2 \leq (a_k^2 + 1)(b_k^2 + 1)$ (1p)
 Înmulțirea inegalităților anterioare și finalizare utilizând $\prod_{k=1}^n (b_k^2 + 1) = \prod_{k=1}^n (a_k^2 + 1)$ (1p)

SUBIECTUL II

- a) Pentru $n=1$ în relația de recurență se obține $\sqrt{a_1^2 - 33} = 2 + \sqrt{a_1^2 - 34} = 2 \Rightarrow a_1^2 - 33 = 4$
 $\Rightarrow a_1 = \sqrt{37} = \sqrt{2^2 + 33}$ și analog, pentru $n=2$ se obține $\Rightarrow a_2 = \sqrt{42} = \sqrt{3^2 + 33}$ (2p)
- b) Demonstrăm prin inducție matematică $P(n): a_n = \sqrt{n^2 + 33}$
 $P(1): a_1 = \sqrt{1^2 + 33}$ (adevărat)..... (1p)
 Presupunem că $a_n = \sqrt{n^2 + 33}$. Din relația de recurență deducem $\sqrt{a_{n+1}^2 - 33} = 2 + \sqrt{n^2 + 33 - 2n - 32}$
 $\Rightarrow \sqrt{a_{n+1}^2 - 33} = n + 1 \Rightarrow a_{n+1}^2 - 33 = (n+1)^2 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{(n+1)^2 + 33}$ (2p)
- c) Avem $a_{19} = \sqrt{394} \approx 19,84$, $x_{19} = \left\lceil \frac{40000}{\sqrt{394}} \right\rceil$ și $19,84 < \sqrt{394} < 19,85 \Rightarrow \frac{40000}{19,85} < \frac{40000}{\sqrt{394}} < \frac{40000}{19,84}$
 $\Rightarrow 2015 < \frac{40000}{\sqrt{394}} < 2016 \Rightarrow x_{19} = 2015$ (1p)
- d) $x_n = 2015 \Leftrightarrow 2015 \leq \frac{40000}{\sqrt{n^2 + 33}} < 2016 \Leftrightarrow \frac{40000}{2016} < \sqrt{n^2 + 33} \leq \frac{40000}{2015} \Leftrightarrow 393 < n^2 + 33 \leq 394 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow n^2 + 33 = 394 \Leftrightarrow n = 19$ (1p)

SUBIECTUL III (vezi fig.1)

Considerăm $\frac{AM}{AB} = x$ și $\frac{AN}{AC} = y$.

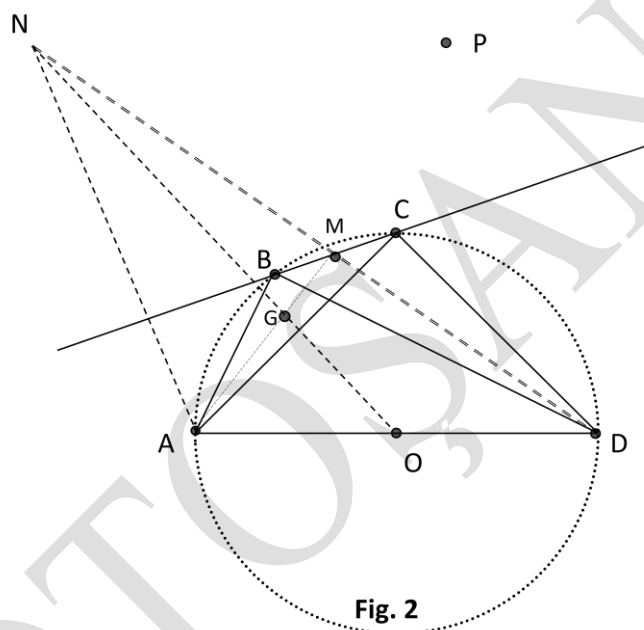
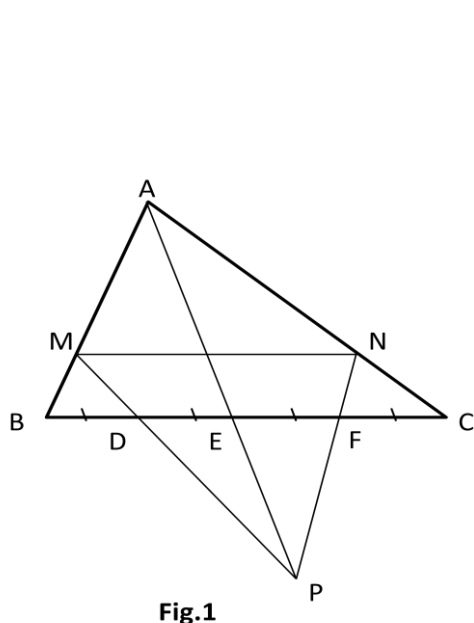
- " $\Rightarrow$ " Notăm P punctul de concurență al celor trei drepte și aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle ABE$ și $\triangle ACE$ cu punctele coliniare $M - D - P$ respectiv $N - F - P$ se obține
 $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BD}{DE} \cdot \frac{EP}{PA} = \frac{AN}{NC} \cdot \frac{CF}{FE} \cdot \frac{EP}{PA} = 1$ (2p)
 Deci $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ de unde $x = y$ (1p)
 Dacă prin absurd $x = \frac{1}{2}$ atunci M este mijlocul lui (AB) iar dreptele MD , AE și NF se obțin

paralele, fals (1p)

" $\Leftarrow$ " $x = y \neq \frac{1}{2}$, deci dreptele MD și NF intersectează dreapta AE în P respectiv T , puncte care se află în exteriorul segmentului (AE) (1p)

Folosind teorema lui Menelaus în aceleași triunghiuri, obținem $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BD}{DE} \cdot \frac{EP}{PA} = \frac{AN}{NC} \cdot \frac{CF}{FE} \cdot \frac{ET}{TA} = 1$

$\Rightarrow \frac{EP}{PA} = \frac{ET}{TA} \Rightarrow T = P$ (2p)



SUBIECTUL IV (Vezi fig. 2)

a) Notăm cu M mijlocul segmentului (BC) și cum G este centrul de greutate al triunghiului ABC obținem $\frac{MG}{GA} = \frac{1}{2}$. Punctele A, B, C și D se află pe cercul de centru O și rază OA deci $OM \perp BC \Rightarrow OM \parallel AN$ (1p)

Teorema lui Thales $\Rightarrow \frac{OG}{GN} = \frac{MG}{GA} = \frac{1}{2}$ și cum NO este mediană în $\square NAD \Rightarrow G$ este centru de greutate și în $\square NAD$ (1p)

$\Rightarrow 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OD}$ (1p)

Variantă: Se arată că M este și mijlocul lui (ND) (de exemplu cu reciproca teoremei liniei mijlocii) și se utilizează vectorul de poziție al mijlocului unui segment ($NCDB$ este paralelogram).

b) Din relația de la a) $\Rightarrow \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$ și cum O este centrul cercului circumscris triunghiului $ABC \Rightarrow$ (Relația lui Sylvester) N este ortocentru în $\square ABC$ (2p)

c) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow NPDA$ paralelogram..... (2p)

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.