OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 9 februarie 2013

CLASA a XI– a

1. Fie A şi B două matrice pătratice de ordinul doi cu elemente complexe cu proprietatea că $AB - BA = A$. Să se arate că $AB^n A = O_2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

G.M. 11/2012

2. a) Să se găsească un exemplu de matrice distincte $A, B, C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, astfel încât $\det(A) = \det(B) = \det(C) = -1$ şi $\det(A + B) > \det(B + C)$.

b) Fie matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ cu $\det(A) = \det(B) = \det(C)$ şi $\det(A+B) > \det(B+C)$. Dacă $\det(A + i \cdot B) = \det(B + i \cdot C)$, să se demonstreze că $\det\left(A + \sqrt{3}B\right) + \det\left(B + \sqrt{2}C\right) > \det\left(A + \sqrt{2}B\right) + \det\left(B + \sqrt{3}C\right)$.

Dana Heuberger

3. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, cu $x_1 = \dfrac{24}{5}$, astfel încât $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$5x_{n+1} = 13x_n + 12\sqrt{x_n^2 + 4}.$$

a) Să se demonstreze că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 5^n - 5^{-n}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{x_n}{5^n}\right)^{x_n^2}$.

Cristina Ocean

4. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, cu $x_0 \in (0, \infty)$, astfel încât

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (x_{n+1} - x_n)(x_n + 1) = 1.$$

a) Să se arate că şirul este crescător.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{n}}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.
Subiectele au fost propuse şi selectate de:
prof. Gabriela Boroica, Colegiul Naţional „Vasile Lucaciu”, Baia Mare
prof. Dana Heuberger, Colegiul Naţional „Gheorghe Şincai”, Baia Mare

SUCCES!