

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Locală, județul Timiș
23.02.2018

Clasa a X-a

1. a) Dacă numerele $x, y, z \in \mathbf{R}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice și numerele $a, b, c \in (0, \infty)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, demonstrați că $a^{y-z} \cdot b^{z-x} \cdot c^{x-y} = 1$.

b) Dacă numerele $a, b, c \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, demonstrați că:

$$\left(\frac{bc}{a}\right)^{\lg b - \lg c} \cdot \left(\frac{ca}{b}\right)^{\lg c - \lg a} \cdot \left(\frac{ab}{c}\right)^{\lg a - \lg b} \in \mathbf{N}.$$

2. Pentru $a, b \in (0, 1)$ demonstrați că are loc inegalitatea: $\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 1$.

3. Se consideră mulțimile $A = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})i| \leq 1\}$ și $B = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - i| \leq 1\}$. Determinați mulțimea $A \cap B$.

(A. Doboșan, R.M.T. nr. 2/ 2016 - enunț modificat)

4. Fie $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Determinați numerele $z \in \mathbf{C}$ cu proprietatea că $\bar{z} + z^n = i(\bar{z} - z^n)$.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.