



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – CONSTANȚA, 08.02.2020**

Clasa a VIII-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL I

- a) Se consideră expresia $E(a,b) = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{16ab}{a^2+b^2}$, unde a și b sunt numere reale strict pozitive.
Arătați că numărul $E(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ este rațional.
- b) Dacă x, y și z sunt numere reale astfel încât $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 20 = 4x + 12y + 24z$, arătați că $x \in [-1, 5]$, $y \in [0, 3]$ și $z \in \left[\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right]$.

Gazeta Matematică

Soluție:

- a) $E(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1) = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)^2} + \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)^2} + \frac{16(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)^2 + (\sqrt{2}+1)^2} = (\sqrt{2}-1)^4 + (\sqrt{2}+1)^4 + \frac{16}{6} \dots\dots\dots 1p$
 $= (3-2\sqrt{2})^2 + (3+2\sqrt{2})^2 + \frac{8}{3} \dots\dots\dots 1p$
 $= \frac{110}{3} \in Q \dots\dots\dots 1p$
- b) $(x-2)^2 + (2y-3)^2 + (3z-4)^2 = 9 \dots\dots\dots 2p$
 $|x-2| \leq 3, |2y-3| \leq 3, |3z-4| \leq 3 \dots\dots\dots 1p$
 Finalizare $\dots\dots\dots 1p$

SUBIECTUL II

- a) Considerăm numerele reale $a = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2019}+\sqrt{2020}}$ și
 $b = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2020}+\sqrt{2021}}$. Arătați că $(a+b+1)^2 + 4$ este pătrat perfect.
- b) Demonstrați că numărul $\sqrt{n+\sqrt{n+1}}$ este irațional, pentru orice număr natural nenul n .

Soluție:

- a) $a+b = \sqrt{2021}-1 \dots\dots\dots 2p$
 $(a+b+1)^2 + 4 = 2025 = 45^2 \dots\dots\dots 2p$
- b) Presupunem prin reducere la absurd că există $n \in N^*$ astfel încât
 $\sqrt{n+\sqrt{n+1}} = q, q \in Q \dots\dots\dots 1p$
 $\sqrt{n+1} = q^2 - n \in Q \Rightarrow n+1 = p^2, p \in N, p > 1 \Rightarrow n+\sqrt{n+1} = p^2 - 1 + p \dots\dots\dots 1p$
 $p^2 < p^2 + p - 1 < (p+1)^2 \Rightarrow n+\sqrt{n+1}$ nu este pătrat perfect
 $\Rightarrow \sqrt{n+\sqrt{n+1}} \in R \setminus Q, \forall n \in N^* \dots\dots\dots 1p$

SUBIECTUL III

Fie $\triangle ABC$ echilateral de latură $2a$. Pe planul său se ridică perpendicularele AA' și CC' , $AA' = 2a\sqrt{3}$, $CC' = a\sqrt{3}$.

- Calculați distanța de la punctul C' la dreapta $A'B$.
- Determinați măsura unghiului dintre planele $(A'BC')$ și (ABC) .

Soluție:

a) Fie $C'S \perp AA'$, $S \in AA' \Rightarrow A'C' = a\sqrt{7}$ (1)

Din $\triangle C'CB \Rightarrow C'B = a\sqrt{7}$ (2)

Din relațiile (1) și (2) $\Rightarrow \triangle A'BC'$ isoscel2p

Fie $C'P \perp A'B$, $P \in A'B \Rightarrow d(C', A'B) = C'P$.

Din $\triangle A'AB \Rightarrow A'B = 4a \Rightarrow PB = 2a$;

Din $\triangle C'PB \Rightarrow C'P = a\sqrt{3}$ 2p

b) Fie $A'C' \cap AC = \{Q\}$;

$CC' \parallel AA'$, $CC' = \frac{AA'}{2} \Rightarrow CC'$ linie mijlocie în $\triangle QAA' \Rightarrow CQ = AC = 2a$ 1p

$\triangle ABQ$ dreptunghic, $m(\angle ABQ) = 90^\circ$

$\triangle A'BQ$ dreptunghic, $m(\angle A'BQ) = 90^\circ$ 1p

$(A'BC') \cap (ABC) = BQ$,

$A'B \perp BQ$, $A'B \subset (A'BC')$,

$AB \perp BQ$, $AB \subset (ABC) \Rightarrow$

$m[\angle((A'BC'), (ABC))] = m(\angle A'BA) \Rightarrow \operatorname{tg}(\angle A'BA) = \sqrt{3} \Rightarrow m(\angle A'BA) = 60^\circ$ 1p

SUBIECTUL IV

În cubul $ABCD A'B'C'D'$ notăm cu O' și O centrele fețelor $(A'B'C'D')$, respectiv $(BCC'B')$, iar M , S , T și Q sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, $[AO]$, $[D'O']$, respectiv $[AA']$.

- Arătați că aria patrulaterului $D'CMQ$ este mai mare decât aria unei fețe a cubului.
- Dacă R este mijlocul segmentului OC , demonstrați că $(RST) \parallel (A'BC')$.

Soluție:

a) $MQ \parallel D'C$ (1) și $MQ = \frac{1}{2} \cdot A'B = \frac{1}{2} \cdot D'C < D'C$ (2)

$\triangle A'D'Q \equiv \triangle BCM \Rightarrow D'Q \equiv CM$ (3)

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow D'CMQ$ trapez isoscel2p

Fie $AB = a$. $D'C = a\sqrt{2} \Rightarrow QM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Fie $ME \perp D'C \Rightarrow ME = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$, deci, $A_{D'CMQ} = \frac{9a^2}{8} > a^2 = A_{ABCD}$ 2p

b) Fie R mijlocul segmentului OC .

SR linie mijlocie în $\triangle OAC \Rightarrow SR \parallel AC \Rightarrow SR \parallel A'C'$ 1p

$\frac{B'T}{TD'} = 3$

$\Rightarrow RT \parallel D'C \Rightarrow RT \parallel A'B$ 1p

$\frac{B'R}{RC} = 3$

Finalizare, $(RST) \parallel (A'BC')$ 1p