

**BAREM DE CORECTARE SI NOTARE****Clasa a XII a - Matematică-informatică****Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020**

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

SUBIECTUL 1Obs $x \circ y = (x - i)(y - i) + i, \forall x, y \in \mathbb{C}$

a) $(3 - i) \circ (3 + i) = 9 - 5i$ 1p

$a = 9, b = -5$ 1p

b) $e = 1 + i \in \square$ 2p

c) $x_n = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ de } x} = (x - i)^n + i, \forall x \in \square$ inducție.....2p

$(-1 + i)_{2020} = (-1 + i - i)^{2020} + i = 1 + i$ 1p

SUBIECTUL 2

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} x + 4y & 2y \\ -7y & x - 4y \end{pmatrix} = x \cdot I_2 + y \cdot B, \text{ unde } B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}, B^2 = 2I_2,$$

$\det(A(x, y)) = x^2 - 2y^2 = 1$

Parte stabilă

$A(x, y) \cdot A(a, b) = A(xa + 2yb, xb + ya)$ 2p

$\det(A(x, y) \cdot A(a, b)) = \det(A(xa + 2yb, xb + ya)) = \det A(x, y) \cdot \det A(a, b) = 1$ 1p

$xa + 2yb, xb + ya \in \mathbb{R}, xa + 2yb \neq 0$ 1p

Asociativitate, este cunoscută

Element neutru $I_2 = A(1, 0) \in M$ 1p

Elemente simetrizabile $(A(x, y))^{-1} = A(x, -y) \in M$ 2p

SUBIECTUL 3

a) $\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} (x \cdot \sin x)' dx = x \cdot \sin x \Big|_0^{\pi} = 0$, sau integrare prin părți.....2p

b) $\int_1^e \frac{g(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \cdot \ln x \Big|_1^e - 4\sqrt{x} \Big|_1^e = 4 - 2\sqrt{e}$ 2p

c) $A = \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \cdot g(x) dx = \int_{\pi}^{2\pi} (x \cdot \sin x)' \cdot \ln x dx = x \cdot \sin x \cdot \ln x \Big|_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$ 2p

$A = 2\pi \cdot \sin(2\pi) \cdot \ln(2\pi) - \pi \cdot \sin(\pi) \cdot \ln(\pi) + \cos(2\pi) - \cos(\pi) = 2 \in \square$ 1p

SUBIECTUL 4

a) $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$ 1p

$I_0 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln 2 < \ln e \Leftrightarrow 2 < e$ adevărat.....1p



b) $I_n = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_n^{n+1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 1}\right) \dots\dots\dots 1p$

$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 1}\right) = \frac{1}{2} \ln 1 = 0 \dots\dots\dots 1p$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \ln\left(\frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 1}\right)^{\frac{n}{2}} \dots\dots\dots 1p$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\left(1 + \frac{2n+1}{n^2+1} \right)^{\frac{n^2+1}{2n+1}} \right]^{\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{2n+1}{n^2+1} \right)} = \ln e = 1 \dots\dots\dots 2p$