Olimpiada naţională de matematică

Etapa locală, 15 februarie 2014

Clasa a XI a

1. Se spune că două matrice $A,B \in M_2(\mathbb{R})$, sunt ***rude de gradul k,*** $k \in \mathbb{N}$**,** dacă

$$AB = BA \text{ şi } \det(A^2 + B^2) = k .$$

   a) Arătaţi că există cel puţin două matrice A şi B nenule care sunt ***rude de gradul 1.***
   b) Demonstraţi că, dacă două matrice A şi B sunt ***rude de gradul 0,*** atunci $\det A = \det B$.
   c) Stabiliţi o altă cerinţă având în vedere enunţul oferit !
   (Adică vi se cere să creaţi o mini sau o maxi problemă...)

Lucian Dragomir

2. Se consideră $A,B \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $AB + BA = O_3$ şi $P(x) = \det(A + xB)$.

Arătaţi că $P(i) \in \mathbb{R}$ sau $\dfrac{P(i)}{i} \in \mathbb{R}$.

RMT 2/2011

3. Se consideră şirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ cu $x_n \geq 1, y_n \geq 1,$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n{}^2 + y_n{}^2\right) = 2.$ Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Gazeta Matematică 1/2013

4. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \left[\dfrac{1}{x}\right]$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 3 ore.