

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 25.02.2023 –

CLASA A X A

Subiecte

1. Arătați că dacă $a, b, c \in (1, \infty)$ atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{\log_{abc} a}{\log_{abc} (a^4 bc)} + \frac{\log_{abc} b}{\log_{abc} (ab^4 c)} + \frac{\log_{abc} c}{\log_{abc} (abc^4)} \leq \frac{1}{2}.$$

Prof. Roxana Soare, Ploiești

2. a. Studiați monotonia funcției $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
b. Comparați numerele $a = \log_3 11 - \log_7 2$ și $b = \log_2 7 - \log_{11} 3$
c. Comparați numerele $c = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$ și $c = \sqrt{\sqrt{2} + 1} + \sqrt[6]{\sqrt{2} - 1}$

Prof. Gabriel Necula, Ploiești

3. a. Găsiți $a \in (1, 2)$ astfel încât funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, $f(n) = \lfloor a^n \rfloor$, $\forall n \geq 1$ să fie injectivă.
b. Arătați că funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, $f(n) = \lfloor b^n \rfloor$, $\forall n \geq 1$, ($b > 1$) nu este bijectivă.

Prof. Emil Vasile, Ploiești

4. Fie $z_1 + z_2 + z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1$.

Determinați $|z_1^{2022} + z_2^{2022} + z_3^{2022}|$.

Gazeta Matematică, 2022

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.