

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 16 februarie 2014
CLASA A IX-A

Problema 1. Rezolvați ecuația

$$\left[\frac{3x^2 + 1}{3} \right] - \left[\frac{2x^2 + 1}{2} \right] + \left[\frac{3x^2 + 2}{3} \right] = 0,$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

Luigi Catană, Potcoava

Soluție. Ecuația din enunț se scrie sub forma $\left[x^2 + \frac{1}{3} \right] + \left[x^2 + \frac{2}{3} \right] = \left[x^2 + \frac{1}{2} \right]$, de unde, adunând în ambii membri $[x^2]$ și folosind identitatea lui Hermite, rezultă $[3x^2] = [2x^2]$.

Notând $x^2 = y$, cu $y \geq 0$, rezultă $[3y] = [2y] \stackrel{not}{=} p$, unde $p \in \mathbb{N}$, de unde $y \in \left[\frac{p}{3}, \frac{p+1}{3} \right) \cap \left[\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2} \right)$.

Pentru $p \geq 2$ avem $\frac{p+1}{3} \leq \frac{p}{2}$, adică $\left[\frac{p}{3}, \frac{p+1}{3} \right) \cap \left[\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2} \right) = \emptyset$.

Pentru $p = 0$ rezultă $y \in \left[0, \frac{1}{3} \right) \Leftrightarrow x^2 \in \left[0, \frac{1}{3} \right) \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$.

Pentru $p = 1$ rezultă $y \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right) \Leftrightarrow x^2 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right) \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$.

În concluzie, $x \in \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \cup \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right)$.

Problema 2. Demonstrați că pentru orice numere reale $x, y, z \geq 1$ are loc inegalitatea:

$$x(\sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}) + y(\sqrt{z-1} + \sqrt{x-1}) + z(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}) \leq x^2 + y^2 + z^2.$$

Florin Nicolaescu, Balș

Soluție. Pentru orice $x, y \geq 1$ vom arăta că $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \leq xy$. Într-adevăr, împărțind prin xy , inegalitatea se rescrie $\frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-1}}{y} \leq 1$, care se obține din echivalența

$$\frac{\sqrt{a-1}}{a} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{a-1} \leq a \Leftrightarrow (a-2)^2 \geq 0,$$

valabilă pentru orice $a \geq 1$.

Adunând inegalitatea (*) cu analoge obținute prin permutări circulare, obținem:

$$x(\sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}) + y(\sqrt{z-1} + \sqrt{x-1}) + z(\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}) \leq xy + yz + xz \leq x^2 + y^2 + z^2.$$

Egalitatea are loc pentru $x = y = z = 2$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi. Medianele AM , BN , CP taie cercul circumscris triunghiului ABC în punctele D , E , respectiv F . Știind că $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{0}$, arătați că triunghiul ABC este echilateral.

Gazeta Matematică nr. 12/2013

Soluție. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC . Deoarece vectorii $\overrightarrow{MD}$ și $\overrightarrow{GM}$ sunt coliniari, rezultă că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{MD} = \alpha \overrightarrow{GM}$. Analog, există $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{NE} = \beta \overrightarrow{GN}$ și $\overrightarrow{PF} = \gamma \overrightarrow{GP}$. Ținând cont că $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{0}$, rezultă:

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{PF} = \alpha \overrightarrow{GM} + \beta \overrightarrow{GN} + \gamma \overrightarrow{GP} = \alpha \overrightarrow{GM} + \beta \overrightarrow{GN} - \gamma (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = (\alpha - \beta) \overrightarrow{GM} + (\beta - \gamma) \overrightarrow{GN}.$$

Deoarece $\overrightarrow{GM}$ și $\overrightarrow{GN}$ sunt vectori necoliniari, rezultă $\alpha - \beta = \beta - \gamma = 0$, de unde $\alpha = \beta = \gamma$.
Din $\overrightarrow{MD} = \alpha \overrightarrow{GM}$ și $\overrightarrow{NE} = \alpha \overrightarrow{GN}$, obținem

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{GD} = (\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{NE}) - (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MD}) = (\alpha + 1)(\overrightarrow{GN} - \overrightarrow{GM}) = (\alpha + 1)\overrightarrow{MN},$$

deci $DE \parallel MN \parallel AB$. Analog, se obțin relațiile $EF \parallel PN \parallel BC$ și $DF \parallel MP \parallel AC$.

Ca urmare, arcele AE și BD sunt congruente, arcele CE și BF sunt congruente și arcele AF și CD sunt congruente. De aici rezultă că $[AD]$, $[BE]$, $[CF]$ sunt diametri, adică G este centrul cercului circumscris triunghiului ABC . În concluzie, triunghiul ABC este echilateral.

Problema 4. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale pozitive astfel încât $a_1 = 1$ și

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + a_n} = a_n - 1, \text{ pentru orice } n \geq 2.$$

Determinați partea întreagă a numărului $A_n = a_n a_{n+1} + a_n a_{n+2} + a_{n+1} a_{n+2}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Nelu Gerg, Slatina

Soluție. Pentru $n = 2$, din relația din enunț se obține $a_2 = \sqrt{2}$.

Scriind relația din enunț pentru $n \rightarrow n + 1$, rezultă

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + a_n} + \frac{1}{a_n + a_{n+1}} = a_{n+1} - 1,$$

de unde, folosind din nou enunțul, rezultă că pentru orice $n \geq 2$ avem

$$a_n - 1 + \frac{1}{a_n + a_{n+1}} = a_{n+1} - 1 \Leftrightarrow (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = 1 \Leftrightarrow a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}.$$

Prin inducție, se demonstrează că $a_n = \sqrt{n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Avem $A_n = \sqrt{n(n+1)} + \sqrt{n(n+2)} + \sqrt{(n+1)(n+2)}$. Deoarece pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ au loc relațiile

$$n + \frac{1}{3} < \sqrt{n(n+1)} < n + \frac{1}{2}, \quad n + \frac{2}{3} < \sqrt{n(n+2)} < n + 1, \quad n + 1 < \sqrt{(n+1)(n+2)} < n + \frac{3}{2},$$

prin adunare se obține că $3n + 2 < A_n < 3n + 3$, de unde $[A_n] = 3n + 2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT
Etapa locală – 16 februarie 2014
CLASA A X-A

Problema 1. Se consideră funcția $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z^2 - z - 2}{z - 1}$. Arătați că, dacă $z \neq 1$, atunci $f(z) \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $z \in \mathbb{R}$.

Soluție. Fie $z \neq 1$. Deoarece $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) = \overline{f(z)}$, scriind $f(z) = z - \frac{2}{z-1}$, avem succesiv:

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z - \frac{2}{z-1} = \bar{z} - \frac{2}{\bar{z}-1} \Leftrightarrow z - \bar{z} + \frac{2(z - \bar{z})}{(z-1)(\bar{z}-1)} = 0 \Leftrightarrow (z - \bar{z}) \left(1 + \frac{2}{(z-1)(\bar{z}-1)} \right) = 0.$$

Presupunând $1 + \frac{2}{(z-1)(\bar{z}-1)} = 0$, de unde $(z-1)(\bar{z}-1) + 2 = 0$, adică $|z-1|^2 + 2 = 0$, imposibil.
 Ca urmare, $f(z) \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $z - \bar{z} = 0$, adică $z \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Rezolvați sistemul
$$\begin{cases} \sqrt[4]{x\sqrt{x}} - \sqrt[4]{y\sqrt{y}} = 7 \\ \sqrt[14]{x\sqrt{x\sqrt{x}}} + \sqrt[14]{y\sqrt{y\sqrt{y}}} = 3 \end{cases}.$$

Gazeta Matematică nr. 9/2013

Soluție. Evident, $x, y \geq 0$. Sistemul se rescrie sub forma

$$\begin{cases} \sqrt[8]{x^3} - \sqrt[8]{y^3} = 7 \\ \sqrt[8]{x} + \sqrt[8]{y} = 3 \end{cases}.$$

Notând $\sqrt[8]{x} = a$, $\sqrt[8]{y} = b$, unde $a, b \geq 0$, rezultă $a + b = 3$ și $a^3 - b^3 = 7$, ceea ce conduce la ecuația

$$a^3 - (3-a)^3 = 7 \Leftrightarrow 2a^3 - 9a^2 + 27a - 34 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(2a^2 - 5a + 17) = 0.$$

Unica soluție reală a ecuației este $a = 2$, pentru care se obține $b = 1$, $x = 256$ și $y = 1$.

Problema 3. Determinați funcțiile care satisfac condițiile

$$xy \lg(xy) \leq yf(x) + xf(y) \leq f(xy), \text{ pentru orice } x, y > 0.$$

Soluție. Pentru $x = y = 1$, din enunț rezultă $0 \leq 2f(1) \leq f(1)$, de unde $f(1) = 0$.

Pentru $y = 1$, relația din enunț conduce la $x \lg x \leq f(x)$, pentru orice $x > 0$. (1)

Pentru $y = \frac{1}{x}$, din enunț se obține $0 \leq \frac{f(x)}{x} + xf\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$, deci $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{f(x)}{x^2}$, pentru orice $x > 0$. (2)

Pentru $y = \frac{1}{x}$, din (1) rezultă $\frac{1}{x} \lg\left(\frac{1}{x}\right) \leq f\left(\frac{1}{x}\right)$, deci $f\left(\frac{1}{x}\right) \geq -\frac{\lg x}{x}$ și, ținând cont de (2), obținem

$$-\frac{f(x)}{x^2} \geq -\frac{\lg x}{x} \Leftrightarrow f(x) \leq x \lg x, \text{ pentru orice } x > 0. \quad (3)$$

Din (1) și (3) rezultă că $f(x) = x \lg x$, pentru orice $x > 0$, funcție care satisface condiția din enunț.

Problema 4. Se consideră funcția injectivă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că există $p \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(xy) = f(x)f(y) + p, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Arătați că $p = 0$.

b) Demonstrați că f este impară.

Soluție. a) Pentru $y = 0$, rezultă $f(0) = f(x)f(0) + p$, de unde, presupunând $f(0) \neq 0$, ar rezulta că $f(x) = \frac{p - f(0)}{f(0)}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, adică f ar fi constantă, contradicție cu f injectivă.

Ca urmare, $f(0) = 0$. Luând acum $x = y = 0$, din enunț rezultă $p = 0$.

b) Conform punctului anterior, avem $f(xy) = f(x)f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. (*)

Pentru $x = y = 1$, avem $f(1) = f^2(1)$, de unde rezultă că $f(1) \in \{0, 1\}$. Cum f este injectivă și $f(0) = 0$, rezultă $f(1) = 1$.

Pentru $x = y = -1$, rezultă $1 = f(1) = f^2(-1)$, deci $f(-1) \in \{-1, 1\}$. Cum f este injectivă și $f(1) = 1$, rezultă $f(-1) = -1$.

Pentru $y = -1$, din relația (*) rezultă $f(-x) = f(x)f(-1) = -f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci este f este impară.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT
Etapa locală – 16 februarie 2014
CLASA A XI-A

Problema 1. Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^{\cos x} - \cos 2x}{x^2}$.

Florian Dumitrel

Soluție. Pentru orice x cu $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, avem:

$$\begin{aligned} \frac{(\cos x)^{\cos x} - \cos 2x}{x^2} &= \frac{e^{\cos x \cdot \ln(\cos x)} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \\ &= \cos x \cdot \frac{e^{\cos x \cdot \ln(\cos x)} - 1}{\cos x \cdot \ln(\cos x)} \cdot \ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} + \frac{1 - \cos 2x}{x^2}. \end{aligned}$$

Întrucât

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

și

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x \cdot \ln(\cos x)} - 1}{\cos x \cdot \ln(\cos x)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1,$$

rezultă că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^{\cos x} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}$.

Problema 2. Matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $I_2 + 3AB = 2BA$. Arătați că $\det(AB - BA) = 0$.

Florin Nicolaescu

Soluție. Din ipoteză rezultă că $I_2 + AB = 2(BA - AB)$ și $I_2 + BA = 3(BA - AB)$. Prin urmare,

$$\det(I_2 + AB) = 4 \det(BA - AB) \quad \text{și} \quad \det(I_2 + BA) = 9 \det(BA - AB). \quad (*)$$

Vom arăta că $\det(I_2 + AB) = \det(I_2 + BA)$. Pentru orice matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$f_M(x) := \det(xI_2 + M) = \det M + \text{Tr} M \cdot x + x^2.$$

Cum $\det(AB) = \det(BA)$ și $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, deducem că $f_{AB}(x) = f_{BA}(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. În consecință, avem $f_{AB}(1) = f_{BA}(1)$, adică $\det(I_2 + AB) = \det(I_2 + BA)$.

Din relația (*) rezultă că $\det(BA - AB) = 0$, deci $\det(AB - BA) = 0$.

Problema 3. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin

$$a_1 = 1 \quad \text{și} \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + \frac{n}{n+1}}, \quad (\forall) n \geq 1.$$

Arătați că șirul este convergent și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Florian Dumitrel

Soluție. Prin inducție se arată că

$$1 \leq a_n < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*$$

sau, de exemplu,

$$1 \leq a_n < 2, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

Avem $a_1 = 1$ și $a_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{2}}$, deci $a_1 < a_2$. În ipoteza $a_{n-1} < a_n$, rezultă că

$$a_{n-1} + \frac{n-1}{n} < a_{n-1} + \frac{n}{n+1} < a_n + \frac{n}{n+1},$$

și, în consecință, $a_n < a_{n+1}$. Deci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.

Fiind crescător și mărginit superior, șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent. Dacă $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, atunci $a = \sqrt{a+1}$ ($a >$

1), de unde obținem $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Problema 4. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $\det(A) = 1$. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $\det(A^2 - A + I_3) = 0$;

b) $\det(A + I_3) = 6$ și $\det(A - I_3) = 0$.

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2013

Soluție. Polinomul caracteristic al matricei A are forma

$$f_A(x) = \det(xI_3 - A) = x^3 + ax^2 + bx - 1.$$

Deoarece $A^2 - A + I_3 = (A - \omega I_3)(A - \bar{\omega} I_3)$, unde $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ astfel încât $\omega^3 = -1$, rezultă că

$$\det(A^2 - A + I_3) = |\det(A - \omega I_3)|^2 = |f_A(\omega)|^2. \quad (*)$$

($\Rightarrow$) Dacă $\det(A^2 - A + I_3) = 0$, atunci $f_A(\omega) = 0$, de unde obținem $a = -2$ și $b = 2$, deci

$$f_A(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1.$$

Prin urmare, $\det(A + I_3) = -f_A(-1) = 6$ și $\det(A - I_3) = -f_A(1) = 0$.

($\Leftarrow$) Conform ipotezei, avem $f_A(-1) = -6$ și $f_A(1) = 0$, deci

$$f_A(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1.$$

Cum $f_A(\omega) = 0$, din relația (*) deducem că $\det(A^2 - A + I_3) = 0$.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT
Etapa locală – 16 februarie 2014
CLASA A XII-A

Problema 1. Calculați $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 + \sin 2x} dx$.

Florian Dumitrel

Soluție. Cu schimbarea de variabilă

$$\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x = \varphi(t) = \frac{\pi}{2} - t,$$

obținem

$$\begin{aligned} I &= \int_{\varphi(\frac{\pi}{2})}^{\varphi(0)} \frac{x}{1 + \sin 2x} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\frac{\pi}{2} - t}{1 + \sin(\pi - 2t)} \left(\frac{\pi}{2} - t\right)' dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - t}{1 + \sin 2t} dt = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin 2t} dx - I. \end{aligned}$$

Prin urmare, $I = \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin 2t} dt$.

Notăm $J(a) = \int_0^a \frac{1}{1 + \sin 2t} dx$, $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; avem:

$$\begin{aligned} J(a) &= \int_0^a \frac{1}{1 + \sin 2t} dt = \int_0^a \frac{1 + \operatorname{tg}^2 t}{(1 + \operatorname{tg} t)^2} dt = \int_0^a \frac{(1 + \operatorname{tg} t)'}{(1 + \operatorname{tg} t)^2} dt = \\ &= -\frac{1}{1 + \operatorname{tg} t} \Big|_0^a = 1 - \frac{1}{1 + \operatorname{tg} a}. \end{aligned}$$

Cum $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin 2t} dt = \lim_{a \uparrow \frac{\pi}{2}} J(a) = 1$, deducem că $I = \frac{\pi}{4}$.

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu $2n$ elemente și H un subgrup al său cu n elemente. Să se arate că $x^2 \in H$ pentru orice $x \in G$.

[***]

Soluție. Presupunem că există $a \in G$ cu $a^2 \in G \setminus H$ (este clar că $a \in G \setminus H$). Funcția

$$f : H \rightarrow G \setminus H, \quad f(x) = ax$$

este injectivă și, cum $|H| = |G \setminus H| = n$, rezultă că este și surjectivă. Atunci există $x_0 \in H$ astfel încât $f(x_0) = a^2$, adică $ax_0 = a^2$, de unde $a = x_0 \in H$, contradicție. Așadar, $x^2 \in H$ pentru orice $x \in G$.

Problema 3. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit și H un subgrup propriu, necomutativ, al său. Arătați că există două elemente distincte din $G \setminus H$ care comută.

Gazeta Matematică nr. 9/2013

Soluție. Deoarece H este subgrup propriu al lui G , avem $|H| \geq 2$ și $G \setminus H \neq \emptyset$, deci există $a \in G \setminus H$.

Aplicația $\varphi : H \rightarrow G \setminus H$, $\varphi(x) = ax$ este injectivă și atunci $|G \setminus H| \geq |H| \geq 2$, adică $G \setminus H$ are cel puțin două elemente distincte.

Presupunem prin absurd că oricare elemente distincte din $G \setminus H$ nu comută între ele. Pentru orice $b \in G \setminus H$ avem $b^{-1} \in G \setminus H$. Dacă am avea $b \neq b^{-1}$ ar rezulta că $bb^{-1} \neq b^{-1}b$, adică $e \neq e$, contradicție. Deci $b = b^{-1}$, ceea ce înseamnă că $b^2 = e$ (e este elementul neutru al grupului G).

Fie $b \in G \setminus H$ și $h \in H$. Atunci $bh \in G \setminus H$; obținem $bh = (bh)^{-1} = h^{-1}b^{-1} = h^{-1}b$, de unde

$$bhb = h^{-1}. \quad (*)$$

Fie acum $x, y \in H$ și $b \in G \setminus H$. Folosind relația $(*)$, avem

$$bxy = bxb \cdot byb \cdot b = x^{-1}y^{-1}b = (byx)^{-1} = byx,$$

de unde obținem $xy = yx$, în contradicție cu faptul că H este grup necomutativ.

Problema 4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și strict crescătoare și $(c_n)_{n \geq 1}$ un șir mărginit de numere reale.

Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ dacă și numai dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x + c_n) dx = \int_0^1 f(x) dx$.

Florian Dumitrel

Soluție. ($\Rightarrow$) Vom arăta că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x + c_n) dx = \int_0^1 f(x) dx$.

Funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ este primitivă a lui f . Deoarece F este continuă și

$$\int_0^1 f(x + c_n) dx = \int_{c_n}^{c_n+1} f(t) dt = F(c_n + 1) - F(c_n),$$

rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x + c_n) dx = F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x) dx$.

($\Leftarrow$) Vom demonstra acum că orice subșir convergent al șirului mărginit $(c_n)_{n \geq 1}$ are limita 0, de unde va rezulta că $c_n \rightarrow 0$. Fie $(c_{k_n})_{n \geq 1}$ un subșir convergent al șirului $(c_n)_{n \geq 1}$ și $c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{k_n}$. Să presupunem că $c \neq 0$, de exemplu $c > 0$. Din faptul că f este strict crescătoare rezultă că $f(x + c) > f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$; obținem

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x + c_{k_n}) dx = \int_0^1 f(x + c) dx > \int_0^1 f(x) dx,$$

contradicție. Deci $c = 0$.

Observație. Este suficient ca f să fie doar strict crescătoare, caz în care pentru a demonstra implicația ($\Leftarrow$) se folosește criteriul lui *Lebesgue* de integrabilitate.