

Barem de corectare OLM 2016 Clasa a XI-a

1. Dacă notăm $E = x \cdot \left(\sqrt{ax^2 + 2x + 3} - bx - c \right)$, pentru ca $\lim_{x \rightarrow -\infty} E$ să fie finită, trebuie ca $b < 0$

(1)

(1p)

Se obține $E = \frac{(a-b^2)x^2 + (2-2bc)x + (3-c^2)}{-\sqrt{a + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + b + \frac{c}{x}}$

(2p)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} E = -1 \Leftrightarrow a - b^2 = 0$ (2), $1 - bc = 0$ (3), $3 - c^2 = \sqrt{a} - b$ (4) (1p)

(1), (2) $\Rightarrow \sqrt{a} = -b$; (4) $\Rightarrow 3 - c^2 = -2b$; (3) $\Rightarrow c^3 - 3c - 2 = 0 \Rightarrow c \in \{-1, 2\}$ (2p)

Dacă $c = 2$, atunci $b = \frac{1}{2} > 0$. Dacă $c = -1$, atunci $b = -1$, $a = 1$ (1p)

2. Fie A matricea sistemului;

a) $\det A = (c-a)(c-b)(b-a)(a+b+c)$

(2p)

Cum $c-a \neq 0$, $c-b \neq 0$, $b-a \neq 0$, avem soluție unică $\Leftrightarrow a+b+c \neq 0$ (1p)

b) Cum $\det A = 0$ și $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b-a \neq 0$, rezultă că $\text{rang } A = 2$ (1p)

$\Delta_{car} = (1-a)(1-b)(b-a)(a+b+1)$

(1p)

Sistemul are soluții $\Leftrightarrow a=1$ sau $b=1$ sau $c=1$, adică $1 \in \{a, b, c\}$

(1p)

Dacă $1 \in \{a, b, c\}$, fie $z = \lambda \in \mathbb{R}$. Rezolvând sistemul format din primele două ecuații, se

obține $x = \frac{\lambda(c-b)+b-1}{b-a}$, $y = \frac{\lambda(a-c)+1-a}{b-a}$, $z = \lambda$; cu $\lambda \in \mathbb{R}$ (1p)

Observație. Se poate rezolva întreaga problemă folosind metoda lui Gauss.

3. Notăm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \ln(1+n^3) = l$ (dacă limita există)

Dacă $x_0 = 0$, atunci $x_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci $l = 0$ (1p)

Fie $x_0 > 0$; atunci (prin inducție) $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (1p)

Avem $\frac{x_{n+1}}{x_n} = a \cdot e^{-x_n} < a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de unde $x_n \leq a^n x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (2p)

Rezultă $0 \leq x_n \ln(1+n^3) \leq a^n x_0 \ln(1+n^3)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (1) (1p)

Folosind $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n P(n) = 0$, P funcție polinomială, avem

$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n x_0 \ln(1+n^3) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_0 \cdot \frac{\ln(1+n^3)}{1+n^3} \cdot a^n (1+n^3) \right) = 0$

(1p)

Din (1) rezultă $l = 0$ (1p)

4. a) De exemplu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2p)

b) Avem $(B - I_3)(B^5 + B^4 + B^3 + B^2 + B + I_3) = B^6 - I_3 = -I_3$ **(1p)**

Rezultă $\det(B - I_3) \cdot \det C = -1$, unde $C = B^5 + B^4 + B^3 + B^2 + B + I_3$ **(1p)**

Deci $\det(B - I_3) \neq 0$, ceea ce implică $B - I_3$ inversabilă

(1p)

Avem $C = B^3(B^2 + B + I_3) + B^2 + B + I_3 = (B^2 + B + I_3)(B^3 + I_3)$ **(1p)**

$\det C \neq 0 \Rightarrow \det(B^2 + B + I_3) \neq 0 \Rightarrow B^2 + B + I_3$ inversabilă **(1p)**

Observație. Se putea utiliza și descompunerea $B^6 - I_3 = (B^3 + I_3)(B - I_3)(B^2 + B + I_3)$ sau, folosind teorema Cayley-Hamilton, din $B^6 = O_3$ se deduce $B^3 = O_3$ și atunci rezultatul se obține din descompunerea $B^3 - I_3 = (B - I_3)(B^2 + B + I_3)$.