

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2014
Clasa a XI-a

Subiecte:

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Să se determine mulțimea de matrice :

$$M = \{X \in M_2(\mathbb{Z}) \mid AX = X^2 A\}.$$

Prof. Burtea Marius, Alexandria

2. Aflați numerele reale $a, b, c > 0$ dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{a^2 n^2 + 2014n + 1} - bn + c \right) = \sqrt{\frac{2c}{a}} \cdot \sqrt{2014} \text{ și } a + c = 72.$$

Prof. Voiculeț Septimius, Videle

3. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1^x + 2^x + \dots + n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$.

Să se calculeze :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{\ln n}$$

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$

a) Să se determine valorile lui a pentru care matricea A este inversabilă.

b) Să se arate că $A^{2014} \neq O_3, \forall a \in \mathbb{R}.$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.