

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 9.02.2013**

CLASA a V-a

SUBIECTUL 1

Comparați numerele: $x = 2^{222} + 2^{202}$ și $y = 2^{221} + 2^{220} + 2^{212}$.

RMT 4/2008

SUBIECTUL 2

Fie numărul $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{511}$.

- a) Arătați că numărul $A + 1$ este divizibil cu 512.
- b) Aflați restul împărțirii numărului $A - 1$ la 512.

SUBIECTUL 3

- a) Dați un exemplu de triplet (a, b, c) , unde a, b, c și $(a + b + c):3$ sunt patru pătrate perfecte diferite.
- b) Arătați că există o infinitate de triplete (a, b, c) , unde a, b, c și $(a + b + c):3$ sunt patru pătrate perfecte diferite.

SUBIECTUL 4

- a) Aflați numerele de forma $\overline{abc}$, știind că $\overline{abc}$ împărțit la $\overline{bc}$ dă câtul 3 și restul 4.
- b) Aflați numerele de forma $\overline{abcd}$, știind că $\overline{abcd}$ împărțit la $\overline{bcd}$ dă câtul 33 și restul 32.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 9.02.2013**

CLASA a VI-a

SUBIECTUL 1

Determinați cel mai mic număr natural n , de patru cifre, știind că $n - 19$ este divizibil cu 28 și $n - 31$ este divizibil cu 36.

SUBIECTUL 2

Aflați numerele prime a, b, c , știind că $a + b = 380$ și $6a + 15b + 29c = b^4$.

SUBIECTUL 3

- a) Aflați măsura unui unghi, știind că măsura complementului său este cu 55° mai mică decât două treimi din măsura suplementului său.
- b) Unghiurile AOB și BOC sunt neadiacente suplementare. Aflați măsurile lor, știind că bisectoarea unghiului BOC formează cu [OA un unghi având măsura cu 5° mai mare decât măsura unghiului BOC.

SUBIECTUL 4

Triunghiurile isoscele ABC și DBC au aceeași bază [BC] și interioarele disjuncte.

Dacă $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, astfel încât $AM = AN$, iar $MD \cap BC = \{E\}$, $ND \cap BC = \{F\}$, demonstrați că $ME = NF$ și $\angle FMN \equiv \angle ENM$.

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore.

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 9.02.2013**

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

Rezolvați ecuația: $\frac{1}{1} \left(\frac{x}{2012} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2012} + \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2012} + \frac{3}{4} \right) + \dots + \frac{1}{2012} \left(\frac{x}{2012} + \frac{2012}{2013} \right) = \frac{x}{2013}.$

RMT 1/2009(ENUNȚ ACTUALIZAT)

SUBIECTUL 2

- a) Scrieți numărul $\frac{1}{2013}$ ca sumă de două fracții cu numărătorul 1 și numitori diferiți.
- b) Arătați că numărul $\frac{1}{2013}$ se scrie ca suma a 2013 fracții cu numărătorul 1 și numitori diferiți.

SUBIECTUL 3

În rombul ABCD, $m(\hat{A}) = 60^\circ$, M și N sunt mijloacele laturilor [AB], respectiv [BC]. Dacă $AN \cap BD = \{P\}$ și $AN \cap DM = \{Q\}$, arătați că rapoartele $\frac{PQ}{PN}$ și $\frac{DQ}{DM}$ au aceeași valoare și să se determine această valoare.

SUBIECTUL 4

În triunghiul ABC, $m(\hat{A}) = 120^\circ$, $AB = 42$ cm, $AC = 56$ cm, iar [AD este bisectoare, $D \in (BC)$. Aflați lungimea segmentului [AD].

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.
Timp de lucru: 3 ore.

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 9.02.2013**

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

Rezolvați în numere întregi ecuația:
$$\frac{1}{x + y + \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x + y - \sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{1}{2}.$$

RMT 4/2009

SUBIECTUL 2

Fie $a \geq b > 0$, m_a , m_g media aritmetică, respectiv media geometrică a numerelor a și b , atunci

$$\frac{m_a}{m_g} + \frac{m_g}{m_a} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

RMT 4/2010

SUBIECTUL 3

Se consideră cubul $ABCA'B'C'D'$ și M , N , P , Q mijloacele segmentelor $[BC]$, $[AA']$, $[DD']$, $[BC']$.

- Aflați măsura unghiului dintre $D'Q$ și $A'B$.
- Demonstrați că planele $(D'NQ)$ și (AMP) sunt paralele, iar dacă lungimea muchiei cubului este de 12 cm, determinați distanța dintre ele.

SUBIECTUL 4

În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, M este mijlocul segmentului $[A'B']$, $AB=AA'=12$ cm.

- Aflați distanța de la punctul B' la dreapta de intersecție a planelor (AMC') și (ABC) .
- Dacă $\{N\} = BB' \cap (AMC')$ și $\{P\} = BC \cap (AMC')$, determinați aria triunghiului ANP .

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Timp de lucru: 3 ore.

CLASA a V-a**SUBIECTUL 1**

Comparați numerele: $x = 2^{222} + 2^{202}$ și $y = 2^{221} + 2^{220} + 2^{212}$.

VARIANTA 1 DE NOTARE:

În baza 2, x are 223 cifre,	3p
iar y are 222 cifre,	3p
rezultă $x > y$.	1p

VARIANTA 2 DE NOTARE:

$x = 2^{212} \cdot 1024 + 2^{202}$,	3p
iar $y = 2^{212}(2^9 + 2^8 + 1) = 2^{212} \cdot 769$,	3p
rezultă $x > y$.	1p

VARIANTA 3 DE NOTARE:

$x = 2^{221} + 2^{221} + 2^{202}$	3p
$= 2^{221} + 2^{220} + 2^{220} + 2^{202}$.	2p
Cum $2^{220} + 2^{202} > 2^{212}$, rezultă $x > y$.	2p

SUBIECTUL 2

Fie numărul $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{511}$.

- Arătați că numărul $A + 1$ este divizibil cu 512.
- Aflați restul împărțirii numărului $A - 1$ la 512.

VARIANTA 1 DE NOTARE:

a)

Calculând $2A - A = 2^{512} - 1$, rezultă $A + 1 = 2^{512}$.	2p
Cum $512 = 2^9$ și $A + 1 = 2^{503} \cdot 2^9$, se obține $A + 1$ este divizibil cu 512.	1p

b)

$A - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{511}$	1p
$= 2 + 2^2 + \dots + 2^8 + 2^9(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{502})$	2p
$= 510 + 512(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{502})$, rezultă restul este 510.	1p

VARIANTA 2 DE NOTARE:

a)

$A + 1 = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{511}$	1p
$2 + 2 = 2^2, 2^2 + 2^2 = 2^3, \dots, 2^{511} + 2^{511} = 2^{512}$.	1p
Cum $512 = 2^9$ și $A + 1 = 2^{503} \cdot 2^9$, se obține $A + 1$ este divizibil cu 512.	1p

b)

$A - 1 = A + 1 - 2$	1p
$= \mathcal{M}_{512} - 2$	1p
$= \mathcal{M}_{512} + 510$, rezultă restul este 510.	2p

SUBIECTUL 3

- Dați un exemplu de triplet (a, b, c) , unde a, b, c și $(a + b + c):3$ sunt patru pătrate perfecte diferite.
- Arătați că există o infinitate de triplete (a, b, c) , unde a, b, c și $(a + b + c):3$ sunt patru pătrate perfecte diferite.

a)

Pentru un singur exemplu: $(1, 25, 121)$ sau $(25, 49, 289)$.	1p
Calculează $(1+25+121):3 = 49$ sau $(25+49+289):3 = 121$, pătrat perfect. Numai pentru unul se acordă cele 2p.	2p

b)

Un exemplu de forma $(k^2, 25k^2, 121k^2)$, unde $k \in \mathbb{N}^*$	2p
Și $(k^2 + 25k^2 + 121k^2):3 = 49k^2 = (7k)^2$, arată că există o infinitate de triplete (a, b, c) , unde a, b, c și $(a + b + c):3$ sunt patru pătrate perfecte diferite.	2p

SUBIECTUL 4

- a) Aflați numerele de forma $\overline{abc}$, știind că $\overline{abc}$ împărțit la $\overline{bc}$ dă câtul 3 și restul 4.
- b) Aflați numerele de forma $\overline{abcd}$, știind că $\overline{abcd}$ împărțit la $\overline{bcd}$ dă câtul 33 și restul 32.

a)

$\overline{abc} = 3 \cdot \overline{bc} + 4$, de unde $100a + \overline{bc} = 3 \cdot \overline{bc} + 4$.	1p
$100a = 2 \cdot \overline{bc} + 4$ sau $50a = \overline{bc} + 2$.	1p
Cu soluțiile: $a = 1$, $\overline{bc} = 48$ și $a = 2$, $\overline{bc} = 98$. Numerele sunt: 148 și 298.	1p

b)

$\overline{abcd} = 33 \cdot \overline{bcd} + 32$,	1p
de unde $1000a + \overline{bcd} = 33 \cdot \overline{bcd} + 32$, apoi $1000a = 32 \cdot \overline{bcd} + 32$	1p
și de aici $125a = 4 \cdot \overline{bcd} + 4$ sau $125a = 4(\overline{bcd} + 1)$	1p
Cu soluțiile: $a = 4$, $\overline{bcd} = 124$ și $a = 8$, $\overline{bcd} = 249$. Numerele sunt: 4124 și 8249.	1p

SUBIECTUL 1

Determinați cel mai mic număr natural n , de patru cifre, știind că $n - 19$ este divizibil cu 28 și $n - 31$ este divizibil cu 36.

VARIANTA 1 DE NOTARE:

$n = 28k + 19$ și $n = 36p + 31$,	1p
rezultă $28k + 19 = 36p + 31$,	1p
$28k = 36p + 12$; $7k = 9p + 3$.	1p
Cea mai mică valoare a lui p pentru care ecuația are soluție este 2 și atunci $p = 7q + 2$.	1p
Se obține $n = 36(7q + 2) + 31 = 252q + 103$.	2p
Cel mai mic număr de patru cifre este 1111.	1p

VARIANTA 2 DE NOTARE:

Numerele de forma $28k + 19$ sunt: 19, 47, 75, 103,	2p
Numerele de forma $36p + 31$ sunt: 31, 67, 103,	2p
Cum 103 este cel mai mic număr comun ambelor forme, rezultă $n = [28, 36] \cdot q + 103$,	1p
$n = 252 \cdot q + 103$.	1p
Cel mai mic număr de patru cifre este 1111.	1p

SUBIECTUL 2

Aflați numerele prime a , b , c , știind că $a + b = 380$ și $6a + 15b + 29c = b^4$.

Din a II-a condiție $6a$ și $b^4 - 15b$ sunt numere pare, rezultă $29c$ este par,	2p
c fiind prim, de unde $c = 2$.	2p
După înlocuire și cu prima relație se obține $2280 + 9b + 58 = b^4$ sau $b(b^3 - 9) = 2338$.	1p
$b \mid 2338 = 2 \cdot 7 \cdot 167$. Singura valoare b , număr prim, care verifică este $b = 7$.	1p
Numerele sunt: $a = 373$, $b = 7$, $c = 2$.	1p

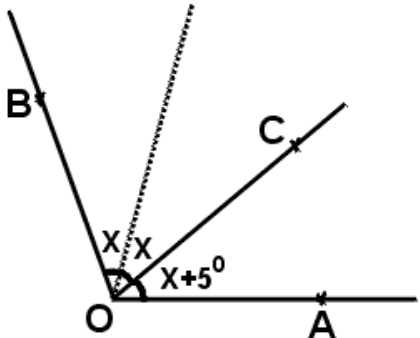
SUBIECTUL 3

- a) Aflați măsura unui unghi, știind că măsura complementului său este cu 55° mai mică decât două treimi din măsura suplementului său.
- b) Unghiurile AOB și BOC sunt neadiacente suplementare. Aflați măsurile lor, știind că bisectoarea unghiului BOC formează cu OA un unghi având măsura cu 5° mai mare decât măsura unghiului BOC .

a)

Dacă c reprezintă măsura complementului și s măsura suplementului unui unghi, atunci $c = s - 90^\circ$ și $c = \frac{2}{3}s - 55^\circ$.	1p
Se obține ecuația: $s - 90^\circ = \frac{2}{3}s - 55^\circ$,	1p
de unde $\frac{1}{3}s = 35^\circ$. Rezultă $s = 105^\circ$ și de aici măsura unghiului este de $180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.	1p

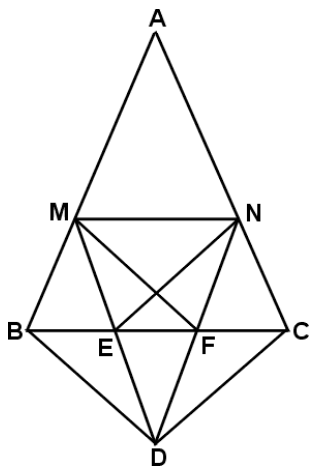
b)

	Dacă $m(\angle BOC) = 2x$, rezultă $m(\angle AOC) = x + 5^\circ$	1p
	și $m(\angle AOB) = 3x + 5^\circ$.	1p
	Și cum $m(\angle AOB) + m(\angle BOC) = 180^\circ$, rezultă ecuația $3x + 5^\circ + 2x = 180^\circ$.	1p
	Cu $x = 35^\circ$. Și atunci $m(\angle AOB) = 110^\circ$ și $m(\angle BOC) = 70^\circ$.	1p

SUBIECTUL 4

Triunghiurile isoscele ABC și DBC au aceeași bază $[BC]$ și interioarele disjuncte.

Dacă $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, astfel încât $AM = AN$, iar $MD \cap BC = \{E\}$, $ND \cap BC = \{F\}$, demonstrați că $ME = NF$ și $\sphericalangle FMN \equiv \sphericalangle ENM$.

	$\triangle MBD \equiv \triangle NCD (LUL) \Rightarrow \sphericalangle BME \equiv \sphericalangle CNF.$	2p
	$\triangle MBE \equiv \triangle CNF (ULU) \Rightarrow ME = NF \text{ și } BE = CF.$	2p
	$\triangle MBF \equiv \triangle NCE (LUL) \Rightarrow \sphericalangle BMF \equiv \sphericalangle CNE (1),$	1p
	dar din $AM = AN$, avem $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ANM (2).$	1p
	Din (1) și (2), rezultă $\sphericalangle FMN \equiv \sphericalangle ENM.$	1p

(Variantă: $\triangle MNE \equiv \triangle NMF (LLL) \Rightarrow \sphericalangle FMN \equiv \sphericalangle ENM$. Varianta este pentru ultimele 2p).

CLASA a VII-a

SUBIECTUL 1

Rezolvați ecuația: $\frac{1}{1} \left(\frac{x}{2012} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2012} + \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2012} + \frac{3}{4} \right) + \dots + \frac{1}{2012} \left(\frac{x}{2012} + \frac{2012}{2013} \right) = \frac{x}{2013}.$

Ecuția este echivalentă cu: $\frac{x}{2012} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013} = \frac{x}{2013}$	2p
$\frac{x}{2012} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} \right) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} = \frac{x}{2013} - \frac{1}{2013} + 1$	1p
$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} \right) \left(\frac{x}{2012} + 1 \right) = \frac{x + 2012}{2013}$	1p
$(x + 2012) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} - \frac{2012}{2013} \right) = 0$	1p
$(x + 2012) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} \right) = 0$	1p
Cum $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} > 0$, rezultă soluția ecuației este -2012 .	1p

SUBIECTUL 2

a) Scrieți numărul $\frac{1}{2013}$ ca sumă de două fracții cu numărătorul 1 și numitori diferiți.

b) Arătați că numărul $\frac{1}{2013}$ se scrie ca suma a 2013 fracții cu numărătorul 1 și numitori diferiți.

VARIANTA 1 DE NOTARE:

a)

$\frac{1}{2013} = \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2014}$	2p
$= \frac{1}{2013 \cdot 2014} + \frac{1}{2014}.$	1p

b)

$\frac{1}{2013} = \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} + \frac{1}{2015} + \dots - \frac{1}{4025} + \frac{1}{4025} =$	2p
$\frac{1}{2013 \cdot 2014} + \frac{1}{2014 \cdot 2015} + \dots + \frac{1}{4024 \cdot 4025} + \frac{1}{4025}.$	2p

VARIANTA 2 DE NOTARE:

a)

Scrie ecuația: $\frac{1}{2013} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ în $\mathbb{N}^*$ și exprimă o necunoscută în funcție de cealaltă.	1p
Obținerea unei soluții.	2p

b)

$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2012 \cdot 2013} = \frac{2012}{2013}$, rezultă	1p
$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2012} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2012} + \dots + \frac{1}{2012 \cdot 2013 \cdot 2012} = \frac{1}{2013}$	2p
Fiind numai 2012 fracții, de mai scrie prima ca suma a două: $\frac{1}{4024} = \frac{1}{4024 \cdot 4025} + \frac{1}{4025}$	1p

SUBIECTUL 3

În romb ABCD, $m(\hat{A}) = 60^\circ$, M și N sunt mijloacele laturilor [AB], respectiv [BC]. Dacă $AN \cap BD = \{P\}$ și $AN \cap DM = \{Q\}$, arătați că rapoartele $\frac{PQ}{PN}$ și $\frac{DQ}{DM}$ au aceeași valoare și să se determine această valoare.

VARIANTA 1 DE NOTARE:

	Triunghiurile ABD și BCD sunt echilaterale, [DP este bisectoare în $\triangle DNQ$ și atunci $\frac{PQ}{PN} = \frac{DQ}{DN} = \frac{DQ}{DM}$.	3p
	Fie $\{R\} = AN \cap DC$. $NC \parallel AD$ și $NC = \frac{AD}{2}$, rezultă $DR = 2 \cdot CD = 4 \cdot MA$	1p
	Și atunci din $\triangle QMA \sim \triangle QDR$ ($AM \parallel DR$), rezultă $\frac{DQ}{MQ} = \frac{DR}{MA} = \frac{4MA}{MA} = 4$,	2p
	de aici $\frac{DQ}{DM} = \frac{4}{5}$.	1p

VARIANTA 2 DE NOTARE:

	Triunghiurile ABD și BCD sunt echilaterale, [DP este bisectoare în $\triangle DNQ$ și atunci $\frac{PQ}{PN} = \frac{DQ}{DN} = \frac{DQ}{DM}$.	3p
	Pentru calculul valorii se poate utiliza și că P este centru de greutate în $\triangle ABC$. $PN = \frac{1}{2} AP$	1p
	și cu teorema bisectoarei $\frac{PQ}{AQ} = \frac{DP}{AD} = \frac{DP}{BD} = \frac{2}{3}$ (deoarece $\frac{DP}{BP} = \frac{AD}{BN} = 2$),	1p
	de unde $\frac{PQ}{AP} = \frac{2}{5}$ sau $PQ = \frac{2}{5} AP$.	1p
	Și atunci $\frac{PQ}{PN} = \frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{4}{5}$.	1p

SUBIECTUL 4

În triunghiul ABC, $m(\hat{A}) = 120^\circ$, $AB = 42$ cm, $AC = 56$ cm, iar [AD este bisectoare, $D \in (BC)$.
Aflați lungimea segmentului [AD].

VARIANTA 1 DE NOTARE:

	Fie $DE \parallel AB$, $E \in (AC)$, $DF \parallel AC$, $F \in (AB)$.	2p
	Patrulaterul AEDF este romb.	1p
	$\frac{DE}{AB} = \frac{DC}{BC}$, $\frac{DF}{AC} = \frac{BD}{BC}$, dă $\frac{DE}{AB} + \frac{DF}{AC} = 1$, (sau $\frac{AE}{AC} = \frac{BD}{BC}$, $\frac{AF}{AB} = \frac{DC}{BC}$)	2p
	cum $DE = DF = AD$, se obține $AD \left(\frac{1}{42} + \frac{1}{56} \right) = 1$,	1p
	de unde $AD = 24$ cm.	1p

VARIANTA 2 DE NOTARE:

	Fie $BM \parallel AD$, $M \in AC$ și $CN \parallel AD$, $N \in AB$.	2p
	Triunghiurile ABM și ACN sunt echilaterale de laturi 42, respectiv 56.	1p
	$\frac{AD}{BM} = \frac{DC}{BC}$ și $\frac{AD}{CN} = \frac{BD}{BC}$,	1p
	rezultă $\frac{AD}{BM} + \frac{AD}{CN} = 1$	2p
	și $\frac{AD}{42} + \frac{AD}{56} = 1$, de unde $AD = 24$ cm.	1p

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL 1

Rezolvați în numere întregi ecuația: $\frac{1}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x+y-\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x+y-\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x+2y}{(x+y)^2 - (x^2+y^2)} = \frac{2(x+y)}{2xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.	2p
Și atunci ecuația devine: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{2}$; x și y numere întregi nenule.	1p
$x = -\frac{2y}{y+2}$ și atunci	1p
$x = -2 + \frac{4}{y+2}$	1p
de unde $y+2 \in \{\pm 1; -2; \pm 4\}$.	1p
Se obține mulțimea soluțiilor: $S = \{(-6, -3); (-3, -6); (-4, -4); (-1, 2); (2, -1)\}$.	1p

SUBIECTUL 2

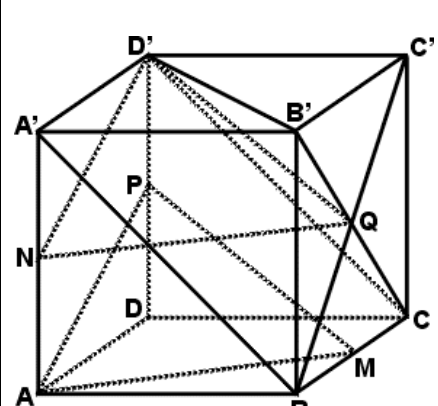
Fie $a \geq b > 0$, m_a , m_g media aritmetică, respectiv media geometrică a numerelor a și b, atunci $\frac{m_a}{m_g} + \frac{m_g}{m_a} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

Dacă se notează $\frac{m_a}{m_g} = x$	1p
și având $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} = \frac{4m_a^2}{m_g^2} - 2$	2p
se obține inegalitatea: $x + \frac{1}{x} \leq 4x^2 - 2$.	1p
Această inegalitate devine: $4x^3 - x^2 - 2x - 1 \geq 0$	1p
sau $(x-1)(4x^2+3x+1) \geq 0$, inegalitate adevărată, deoarece $x \geq 1$ și $4x^2+3x+1 > 0$.	2p

SUBIECTUL 3

Se consideră cubul ABCDA'B'C'D' și M, N, P, Q mijloacele segmentelor [BC], [AA'], [DD'], [BC'].

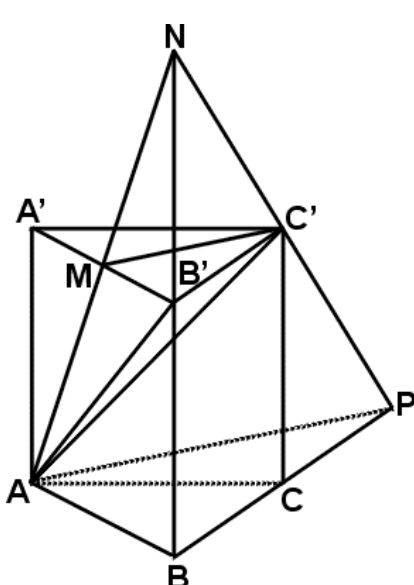
- Aflați măsura unghiului dintre D'Q și A'B.
- Demonstrați că planele (D'NQ) și (AMP) sunt paralele, iar dacă lungimea muchiei cubului este de 12 cm, determinați distanța dintre ele.

	a) A'B D'C, rezultă $m(\angle(D'Q, A'B)) = m(\angle(D'Q, D'C))$.	1p
	$\triangle B'D'C$ fiind echilateral și Q mijlocul lui [B'C], rezultă $m(\angle(D'Q, A'B)) = 30^\circ$.	2p
	b) AM NQ, AP ND' și $AM \cap AP = \{A\}$, rezultă (AMP) (D'NQ).	1p
	Distanța dintre plane este egală cu distanța oricărui punct dintr-un plan la celălalt plan.	1p
	Să luăm $d(N, (AMP))$. Avem: $\mathcal{A}_{AMP} \cdot d(N, (AMP)) = \mathcal{A}_{ANP} \cdot d(M, (ANP))$.	1p
	$\triangle AMP$ este isoscel de laturi $6\sqrt{5}$, $6\sqrt{5}$, $6\sqrt{6}$, se obține $\mathcal{A}_{AMP} = 18\sqrt{21}$. $18\sqrt{21} \cdot d(N, (AMP)) = 36 \cdot 12$, de unde $d(N, (AMP)) = \frac{8\sqrt{21}}{7}$.	1p

SUBIECTUL 4

În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, M este mijlocul segmentului $[A'B']$, $AB = AA' = 12$ cm.

- Aflați distanța de la punctul B' la dreapta de intersecție a planelor (AMC') și (ABC) .
- Dacă $\{N\} = BB' \cap (AMC')$ și $\{P\} = BC \cap (AMC')$, determinați aria triunghiului ANP .

	a) $AM \cap BB' = \{N\}$, unde $BN = 24$ cm, $NC' \cap BC = \{P\}$, unde $BP = 24$ cm.	1p
	În $\triangle APC$, $m(\angle C) = 120^\circ$ și $AC = PC$, rezultă $m(\angle A) = 30^\circ$ și atunci $m(\angle BAP) = 90^\circ$.	1p
	Cum AP este dreapta de intersecție a planelor, cu teorema celor trei perpendiculare, rezultă că $B'A$ reprezintă distanța de la B' la AP . $B'A = 12\sqrt{2}$ cm. (Sau calculând laturile $\triangle B'AP$).	1p
	b) $NB \perp (ABC)$, $BA \perp AP$, $BA, AP \subset (ABC)$, rezultă $NA \perp AP$ și atunci $\triangle ANP$ este dreptunghic în A . (Sau calculând laturile $\triangle ANP$).	1p
	$AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{12^2 + 24^2} = 12\sqrt{5}$, $AP = \sqrt{BP^2 - AB^2} = \sqrt{24^2 - 12^2} = 12\sqrt{3}$	2p
	$\mathcal{A}_{ANP} = 72\sqrt{15}$.	1p