OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
22 februarie 2014

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
Clasa a V-a

1. i). **(3p)** Să se arate că oricare ar fi 5 numere prime distincte mai mari decât 5, există cel puţin două a căror diferenţă este divizibilă cu 10.

Prof. Sascău Gabriela

ii). Un număr natural de forma $\overline{abcd}$ se numește deosebit dacă $5 \cdot \overline{ab} = \overline{cd}$.

a) **(2p)** Câte numere deosebite există?

b) **(2p)** Arătați că orice număr deosebit se divide cu 7.

Prof. Andronic Aurica Mihaela

<u>Soluţie</u>:

i). Varianta I Dacă p este număr prim, $p > 5$, atunci p poate fi de forma 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4, cu $k \in N^*$. Dintre 5 numere prime distincte vor exista două care au aceeași formă, deci diferența lor va fi multiplu de 5. Cum p este număr impar, avem că diferența a două numere impare este număr par. Deci diferența celor două numere va fi multiplu de 10.

Varianta II Dacă p este număr prim, $p > 5$ atunci ultima cifră a lui p, $U(p) \in \{1,3,7,9\}$. Fiind cinci numere,

conform principiului cutiei, două vor avea aceeași ultima cifră iar diferența lor va fi un număr cu ultima cifră 0. Deci diferența celor două numere va fi multiplu de 10.

ii). a) Se observă că $50 \le 5 \cdot \overline{ab} \le 99$, de unde obținem $10 \le \overline{ab} \le 19$. $\overline{ab}$ are 10 valori $\Rightarrow \overline{abcd}$ ia 10 valori

b) $\overline{abcd} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd} = \overline{ab} \cdot 100 + 5 \cdot \overline{ab} = 105 \cdot \overline{ab} = 15 \cdot 7 \cdot \overline{ab}$, deci orice număr $\overline{abcd} \vdots 7$

<u>Barem</u>

i)	Dacă p este număr prim, $p > 5$ atunci ultima cifră a lui p, $U(p) \in \{1,3,7,9\}$	*1 p*
	Două numere vor avea ultima cifră aceeași iar diferența lor va fi un număr cu ultima cifră 0. Deci diferența celor două numere va fi multiplu de 10.	*2 p*
ii)	a) Arată că $5 \cdot 10 \le 5 \cdot \overline{ab} \le 99$ și $10 \le \overline{ab} \le 19$	*1 p*
	$\overline{ab}$ are 10 valori. $\Rightarrow \overline{abcd}$ ia 10 valori	*1 p*

b) $\overline{abcd} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd} = \overline{ab} \cdot 100 + 5 \cdot \overline{ab}$	*1 p*
$\overline{abcd} = 105 \cdot \overline{ab} = 15 \cdot 7 \cdot \overline{ab} \vdots 7$	*1 p*

2. Un apicultor dispune de o cantitate de miere exprimată printr-un număr natural de trei cifre, numere prime distincte, notat cu $\overline{abc}$, astfel încât una din cifre reprezintă media aritmetică a celorlalte două. Ştiind că în prima zi vinde o cantitate în kg, egală cu suma cifrelor numărului $\overline{abc}$, a doua zi vinde a treia parte din cantitatea rămasă, iar în următoarea zi restul de 240 kg, să se afle cantitatea inițială de miere.

Prof. Petrasciuc Veronica

Solutie

I zi vinde: (a+b+c) kg. Rămân:(100a+10b+c)-(a+b+c)=(99a+9b) kg

II zi vinde: (99a+9b):3=(33a+3b) kg. Rămân: (99a+9b)-(33a+3b)=(66a+6b) kg

III zi vinde restul de 240 kg adică 66a+6b=240 kg $\Rightarrow$ 11a+b=40 kg și cum b este cifră $\Rightarrow 31 \leq 11a \leq 40 \Rightarrow$ a=3

și 33+b=40, adică b=7

Cum una din cifrele numărului dat este medie aritmetică a celorlate două şi în acelaşi timp este şi număr prim, rezultă că c=(a+b):2=5.

Se exclud celelalte două cazuri întrucât:

1)dacă a=(b+c):2 rezultă că 3=(7+c):2,imposibil deoarece c este număr natural.

2)dacă b=(a+c):2 rezultă că 7=(3+c):2,adică c=11 care nu e cifră.

(Se poate rezolva și prin metoda grafică, sau, din condițiile problemei, a,b,c pot fi doar 3,5,7 și se analizează toate cazurile posibile.)

Barem

I zi vinde: (a+b+c) kg. Rămân:(100a+10b+c)-(a+b+c)=(99a+9b) kg	*1 p*
II zi vinde: (99a+9b):3=(33a+3b) kg. Rămân: (99a+9b)-(33a+3b)=(66a+6b) kg	*1 p*
III zi vinde restul de 240 kg adică 66a+6b=240 kg $\Rightarrow$ 11a+b=40 kg	*1 p*
b este cifră $\Rightarrow 31 \leq 11a \leq 40 \Rightarrow$ a=3 și 33+b=40, adică b=7	*1 p*
c=(a+b):2=5.	*1 p*
Dacă a=(b+c):2 rezultă că:3=(7+c):2, imposibil deoarece c este număr natural. Dacă b=(a+c):2 rezultă că 7=(3+c):2, adică c=11 care nu e cifră.	*1 p*
$\Rightarrow \overline{abc}$=375	*1 p*

3. Fie mulțimea A = $\{2^0+2^1; 2^0+2^2; 2^0+2^3;\ldots; 2^0+2^{2013}; 2^1+2^2; 2^1+2^3;\ldots; 2^1+2^{2013}; 2^2+2^3; 2^2+2^4;\ldots$ $2^2+2^{2013};\ldots; 2^{2012}+2^{2013}\}$.

a) **(1p)** Determinaţi mulţimea $B=\{x / x \in A,\ x \text{ impar}\}$.

b) **(3p)** Să se determine cardinalul mulţimii A.

c) **(3p)** Calculaţi suma elementelor mulţimii A.

Prof. Ispășoiu Dorel

<u>Solutie</u>

a) Elementele mulțimii B sunt: $2^0+2^1; 2^0+2^2; 2^0+2^3;\ldots; 2^0+2^{2013}$;

b) Demonstrăm că oricare două elemente ale mulțimii A sunt distincte. Presupunem că există $2^m+2^n=2^p+2^q$ si împărtim la cel mai mic dintre termeni. Se obține un membru par și unul impar și deci egalitatea este falsă.

Numărul elementelor: $2^0+2^1; 2^0+2^2; 2^0+2^3;\ldots; 2^0+2^{2013}$ este 2013

Numărul elementelor : $2^1+2^2; 2^1+2^3;\ldots; 2^1+2^{2013}$ este 2013-2+1=2012

Numărul elementelor : $2^2+2^3; 2^2+2^4;\ldots 2^2+2^{2013}$ este 2013-3+1 = 2011

....

Cardinalul mulțimii A este 2013+2012+2011+...+3+2+1=2013 · 2014:2=2027091

c) $S=2013\cdot2^0+2013\cdot2^1+2013\cdot2^2+...+2013\cdot2^{2013}=2013\cdot(2^{2014}-1)$

<u>Barem</u>

a)	$B = \{2^0+2^1; 2^0+2^2; 2^0+2^3;\ldots; 2^0+2^{2013}\}$	*1 p*
b)	Demonstrează că oricare două elemente ale mulțimii A sunt distincte	*1 p*
	Cardinalul mulțimii A este 2013+2012+2011+...+3+2+1=2013 · 2014:2=2027091	*2 p*
c)	$S=2013\cdot2^0+2013\cdot2^1+2013\cdot2^2+...+2013\cdot2^{2013}=2013\cdot(2^0+2^1+2^2+....+2^{2013})$	*1 p*
	$S=2013\cdot(2^{2014}-1)$	*2 p*

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător