

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Clasa a IX-a M₁

Faza locală

17 februarie 2018

Subiectul 1.(7p)

a) Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit astfel: $x_1 = \frac{1}{6}$ și $x_{n+1} = \frac{n+1}{n+3} \left(x_n + \frac{1}{2} \right)$, $\forall n \geq 1$.

Să se calculeze x_{2018} . (4p)

b) Să se rezolve ecuația $\left\lfloor \frac{3x-1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3x+1}{4} \right\rfloor = 2018$ (3p)

Subiectul 2.(7p)

Fie ABC un triunghi cu lungimile laturilor $AB = a$, $BC = a$, $AC = b$. Pentru orice punct D din planul triunghiului ABC cu proprietatea că $\overrightarrow{BD} = a \overrightarrow{BA} + c \overrightarrow{BC}$. Aratați ca semidreapta (BD este bisectoarea unghiului ABC din triunghiul ABC.

Subiectul 3.(7p)

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația egală cu $\frac{1}{7}$, iar termenii a_1 și a_n sunt numere întregi nenule. Știind că suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice este 2018, se cere :

a) Să se determine n . (3p)

b) Să se determine numărul termenilor din sumă care sunt numere întregi. (4p)

Subiectul 4.(7p)

a) Se consideră $a, b > 0$, $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a^n + b^n = 2$. Demonstrați că $ab \leq 1$ (3p)

b) Dacă $\frac{x}{x^2+x+1} = t \in \mathbb{R}^*$, exprimați în funcție de t expresia $\frac{x^3}{x^6+x^3+1}$ (4p)

Notă : Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7p.