

Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

1. Fie $a = \sqrt{28} - \sqrt{72} + \sqrt{80}$, $b = -\sqrt{63} + \sqrt{162} - \sqrt{180}$ și $c = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$.

Să se arate, că $a : b + c \in \mathbf{N}$.

Rezolvare

$$a = \sqrt{28} - \sqrt{72} + \sqrt{80} = 2\sqrt{7} - 6\sqrt{2} + 4\sqrt{5}, b = -\sqrt{63} + \sqrt{162} - \sqrt{180} = -3\sqrt{7} + 9\sqrt{2} - 6\sqrt{5} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$c = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{63}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{35}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{63}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{63}} = \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2(\sqrt{7} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})}{-3(\sqrt{7} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})} = -\frac{2}{3} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$a : b + c = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0 \in \mathbf{N} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

2. Să se demonstreze că $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \frac{\sqrt{20}}{9} < 2$

Rezolvare

$$\sqrt{2} = \sqrt{1 \cdot 2} < \frac{1+2}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3} < \frac{2+3}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{5} < \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 4} < \frac{3+4}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{12}}{7} < \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

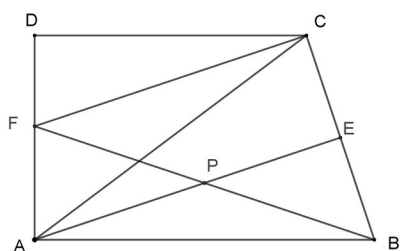
$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} < \frac{4+5}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{20}}{9} < \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \frac{\sqrt{20}}{9} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

3. Se dă trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $m(\angle A) = 90^\circ$ și $AB = AC$. Dacă E este mijlocul segmentului BC , (CF este bisectoarea unghiului $\angle ACD$, $F \in (AD)$, $AE \cap BF = \{P\}$, demonstrați că:

- a) patrulaterul $AECF$ este trapez;
- b) punctul P este egal depărtat de vârfurile patrulaterului $ABCF$.

Rezolvare



Se acordă 1 punct din oficiu pentru fiecare problemă.

a) $AB \parallel CD \Rightarrow \angle ACD = \angle CAB = 2x$ 1 p

$\triangle ABC$ isoscel $\Rightarrow AE$ este bisectoare $\Rightarrow \angle CAE = \frac{\angle CAB}{2} = x$, dar $\angle FCA = \frac{\angle DCA}{2} = x$ 2 p

$\Rightarrow \angle CAE = \angle FCA \Rightarrow AE \parallel FC \Rightarrow AECF$ trapez1 p

b) În $\triangle ABC$ AE este înălțime $\Rightarrow AE \perp BC$, dar $AE \parallel FC \Rightarrow FC \perp BC \Rightarrow \angle FCB = 90^\circ$ 2 p

EP este linie mijlocie în $\triangle FBC \Rightarrow P$ este mijlocul segmentului BF 1 p

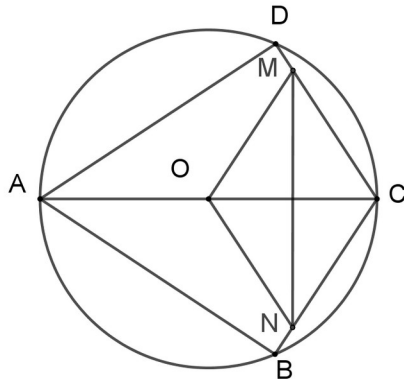
În triunghiurile ABF și FBC AP și CP sunt mediane. Deci $AP = PF = PB = PC$ 2 p

4. Pe un cerc de centru O se consideră punctele A, B, C și D în această ordine. Știm, că AC este diametru, iar punctele B și D sunt situate pe cerc astfel încât $\angle B = \angle D$. Se consider $M \in CD$ și $N \in BC$ astfel încât $OM \parallel BC$ și $ON \parallel CD$. Demonstrați, că:

a) $MN \perp AC$

b) $ABCD$ este pătrat dacă și numai dacă $AC = 2 \cdot MN$

Rezolvare



a) Din ipoteză $\Rightarrow OMCN$ paralelogram0,5 p

Arcele BC și CD sunt congruente, deci și arcele AB și AD sunt congruente $\Rightarrow \angle ACB = \angle ACD$ 1 p

$\Rightarrow CO$ este bisectoare în paralelogramul $OMCN \Rightarrow OMCN$ este romb, deci $MN \perp AC$ 1,5 p

b) „ $\Rightarrow$ ” Dacă $ABCD$ este pătrat, atunci $\angle C = 90^\circ \Rightarrow OMCN$ este pătrat $\Rightarrow OC = MN$ 1,5 p

$\Rightarrow 2 \cdot OC = 2 \cdot MN$ deci $AC = 2 \cdot MN$ 1 p

„ $\Leftarrow$ ” Dacă $AC = 2 \cdot MN$ atunci $2 \cdot OC = 2 \cdot MN \Rightarrow OC = MN$ 1 p

Diagonalele rombului $OMCN$ fiind congruente $\Rightarrow OMCN$ este pătrat $\Rightarrow \angle MCN = 90^\circ$ 1,5 p

$\angle B = \angle D = 90^\circ$ deci și $\angle A = 90^\circ \Rightarrow ABCD$ este pătrat1 p