INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Simion Oros, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail:secretariat@isjsalaj.ro

MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală , SĂLAJ , 10.02.2024
Clasa a XII -a

Subiectul 1

Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și mulțimea

$$G=\left\{X_a\in M_2(\mathbf{R})\,\middle|\, X_a=I_2+aA,\ a>-\frac{1}{2}\right\}.$$

(3p) a) Arătați că G este parte stabile a lui $M_2(R)$ în raport cu înmulțirea matricelor, apoi demonstrați că structura algebrică $(G,\cdot)$ este grup abelian.

(2p) b) Demonstrați că funcția $f:G\to\mathbf{R}$, $f(X_a)=\ln(2a+1)$ este izomorfism între grupurile $(G,\cdot)$, respective $(\mathbf{R},+)$.

(2p) c) Calculați $X_{\frac{1}{2}}\cdot X_{\frac{3}{2}}\cdot\ldots\cdot X_{\frac{2n-1}{2}},\ n\in\mathbf{N}^*$.

Subiectul 2

(7p) Fie G un grup multiplicativ cu proprietățile:

$$(xy)^3=x^3y^3,(xy)^4=x^4y^4,(xy)^5=x^5y^5,\forall x,y\in G.$$

Să se arate că grupul G este comutativ.

Subiectul 3

(3p) a) Calculați $\int\frac{e^x+cosx}{e^x+cosx+sinx}dx,\ \ x\in(0,\infty)$.

(SGM 10/2023)

(4p) b) Determinați primitivele funcției $f:(-1,\infty)\to R$, $f(x)=\dfrac{x^2-x^5}{1+x^9}$.

(GM 9/2023)

Subiectul 4.

(7p) Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$ nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.