



Olimpiada Națională de Matematică 2018

Etapa locală – Iași, 1 februarie 2018

CLASA A IX -A

Subiectul I

Se consideră numerele reale strict pozitive a, b, c , astfel încât $a + b + c = 1$.

a) Arătați că $\frac{a+1}{\sqrt{a+bc}} \geq 2$;

b) Demonstrați că $\frac{a+1}{\sqrt{a+bc}} + \frac{b+1}{\sqrt{b+ac}} + \frac{c+1}{\sqrt{c+ab}} \geq \frac{2}{a^2+b^2+c^2}$.

Gazeta Matematică

Subiectul II

Rezolvați ecuația $[x] + \frac{2a}{[x]} = 2\{x\} + \frac{a}{\{x\}}$, unde $a \in (0, \infty)$.

Subiectul III.

Determinați șirul $(a_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^*$ știind că $a_1 = 1$ și $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{n}{4n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul IV.

Fie triunghiul ABC cu $AB \neq AC$ cu lungimile laturilor $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ și $D \in (BC)$ astfel încât (AD este bisectoarea unghiului BAC).

a) Demonstrați că $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{b+c} (b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC})$.

b) Știind că $E \in (AB)$, $F \in (AC)$, M este mijlocul lui $[EF]$ și N mijlocul lui $[BC]$, arătați că MN și AD sunt paralele dacă și numai dacă $[BE] \equiv [CF]$.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.