OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2014

Clasa a IX-a

1. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ numărul:

$$N = \left(20^{2n} - 13^{2n}\right)\left(13^{2^n} + 13^{2^{n-1}} + 1\right)$$

este divizibil prin 2013.

G.M.B. Nr. 1/2013

2. a) Să se demonstreze că, pentru oricare $a, b, c > 0$, are loc inegalitatea

$$\sqrt{a(b+c)} + \sqrt{b(c+a)} + \sqrt{c(a+b)} \leq (a+b+c)\sqrt{2},$$

iar egalitatea se obţine dacă şi numai dacă $a = b = c$.

b) Fie numerele reale $a_1, a_2, \cdots, a_n$ în progresie geometrică, cu $a_1 > 0$ şi raţia egală cu 2. Notăm $s_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$. Să se demonstreze inegalitatea

$$\sqrt{a_1\left(s_n - a_1\right)} + \sqrt{2a_2\left(s_n - 2a_2\right)} + \sqrt{na_n\left(s_n - na_n\right)} < a_1\left[(n-1)2^n + 1\right]\sqrt{n-1}.$$

Prof. Gabriela Boeriu

3. Să se rezolve ecuaţia

$$\left[x^2 - x - 2\right] = [x].$$

Prof. univ. dr. Marin Marin

4. Considerăm şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_0 = 0,\ x_1 = 1$ şi $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n,\ n \in \mathbb{N}$. Să se determine partea întreagă a numerelor

$$y_n = \frac{\sqrt{x_n^2 + 2^{n+2}}}{2^n + 3},\ n \in \mathbb{N}.$$

Prof. dr. Ioana Maşca

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt cotate cu câte 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2014

Clasa a X-a

1. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x\sqrt{x}} - \sqrt[4]{y\sqrt{y}} = 7 \\ \sqrt[14]{x\sqrt{x\sqrt{x}}} + \sqrt[14]{y\sqrt{y\sqrt{y}}} = 3 \end{cases}.$$

G.M.B. Nr. 9/2013

2. Să se rezolve ecuaţia

$$x(3+\sqrt{5})^{lg\,x} + 20 = 10(5+\sqrt{5})^{lg\,x}.$$

Prof. Gabriela Boeriu

3. Se consideră numerele naturale $p_1, p_2, \cdots, p_n$, astfel încât $1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n$. Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n} \log_2\left(1 - \frac{1}{p_k^2}\right) > -1.$$

Prof. univ. dr. Marin Marin

4. Fie a şi b două numere reale diferite de zero. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a\sin x + b\sin(x\sqrt{5})$, nu este periodică.

Prof. dr. Ioana Maşca

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt cotate cu câte 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2014

Clasa a XI-a

1. Să se rezolve ecuaţia

$$X^3 - 4X^2 + 5X = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

în mulţimea matricelor singulare din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Prof. Sorina Stoian

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale sistemul

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{2012} - x_{2013} + x_{2014} = 1 \\ x_{2013} - x_{2014} + x_1 = 1 \\ x_{2014} - x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Prof. univ. dr. Marin Marin

3. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_0 = 1$ şi relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Să se arate că:

a) şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$a_n = \frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}},\ n \in \mathbb{N},$$

este o progresie geometrică;

b) şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definit prin $y_0 = 1$ şi $2y_ny_{n+1} = y_n^2 + 2$, este un subşir al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Prof. dr. Ioana Maşca

4. Să se determine funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea

$$f(x - y) + f(x + y) = 2(f(x) + f(y)),$$

oricare ar fi numerele reale x şi y.

G.M.B. Nr. 4/2013

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt cotate cu câte 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2014

Clasa a XII-a

1. Considerăm mulţimea de matrice:
$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ c & a+c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$
Să se determine mulţimea G formată din matricele ortogonale din $\mathcal{M}$ şi să se demonstreze că $(G,\cdot)$ este un grup izomorf cu grupul lui Klein.
(Reamintim ca o matrice se numeşte ortogonală dacă este inversabilă, iar inversa sa este matricea transpusă).

G.M.B. Nr. 3/2013

2. Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1+\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^4+x^2+1}}.$$

Prof. univ. dr. Marin Marin

3. Fie a şi b două numere reale strict pozitive. Să se demonstreze inegalităţile:

   a)
$$\int_0^1 \frac{x^a}{1+x^b}\,dx \geq \frac{b}{(a+1)(a+b+1)};$$

   b)
$$\int_0^1 \frac{x^a}{1+x^b}\,dx - \frac{b}{(a+1)(a+b+1)} \leq \frac{\ln 2}{a+2b+1}.$$

Conf. univ. dr. Eugen Păltănea

4. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu n elemente şi $a\in G$ cu proprietatea că $ab = ba \Leftrightarrow b \in \left\{a^k | k\in\mathbb{Z}\right\}$. Un element $c\in G$ se numeşte conjugat cu a dacă există $x\in G$ astfel încât $c = xax^{-1}$. Fie m ordinul lui a în grupul G. Să se arate că:

   a) orice element $c\in G$ conjugat cu a are ordinul m;

   b) G are cel puţin $\frac{n}{m}$ elemente de ordin m.

G.M.B. Nr. 12/2012, enunţ modificat

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii şi sunt cotate cu câte 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.