

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală-21 februarie 2020

CLASA A V-A
SOLUȚII ȘI BAREM

1.	a) Cercetați dacă $(7^2 + 17^2 + 41^2) \cdot (11^2 + 23^2 + 37^2)$ este pătrat perfect;	
	b) Cercetați dacă 2020^{2019} poate fi scris ca sumă de patru pătrate perfecte.	
	a) $7^2 + 17^2 + 41^2 = 49 + 289 + 1681 = 2019$	1p
	$11^2 + 23^2 + 37^2 = 121 + 529 + 1369 = 2019$	1p
	$2019 \cdot 2019 = 2019^2$ este pătrat perfect	1p
	b) Observă că 2020 poate fi scris ca sumă de patru pătrate perfecte: $2020 = 7^2 + 17^2 + 41^2 + 1^2 = 11^2 + 23^2 + 37^2 + 1^2$	1p
	$2020^{2019} = 2020^{2018} \cdot 2020^1 = 2020^{2018} \cdot (7^2 + 17^2 + 41^2 + 1^2)$	1p
2.	Observă că $2020^{2018} = (2020^{1009})^2$ este pătrat perfect	1p
	$2020^{2019} = (7 \cdot 2020^{1009})^2 + (17 \cdot 2020^{1009})^2 + (41 \cdot 2020^{1009})^2 + (1 \cdot 2020^{1009})^2$ sau $2020^{2019} = (11 \cdot 2020^{1009})^2 + (23 \cdot 2020^{1009})^2 + (37 \cdot 2020^{1009})^2 + (1 \cdot 2020^{1009})^2$	1p
	a) Determinați cifrele a și b astfel încât numărul $\overline{ab6}$ scris în baza zece să verifice relația: $\overline{ab6} = 2^{a+b+1}$	
	b) Arătați că numărul $A = 4^{n+3} \cdot 5^n + 2^{2n} \cdot 5^{n+2} + 2 \cdot 4^{n+1} \cdot 5^n + 2^{2n+2} \cdot 5^n$ este divizibil cu 2020, oricare ar fi numărul natural nenul n .	
	a) Numerele de trei cifre care pot fi scrise ca puteri ale numărului 2 sunt următoarele: 128, 256, 512	1p
	$\overline{ab6} = 256$ rezultă $a = 2, b = 5$	1p
	$2^{2+5+1} = 2^8 = 256$	1p
	b) $A = 4^{n+3} \cdot 5^n + 4^n \cdot 5^{n+2} + 2 \cdot 4^{n+1} \cdot 5^n + 4^{n+1} \cdot 5^n =$	1p
	$= 4^n \cdot 5^n \cdot (4^3 + 5^2 + 2 \cdot 4 + 4) =$	1p
	$= 4^n \cdot 5^n \cdot (64 + 25 + 8 + 4) = 20^n \cdot 101 =$	1p
	$= 20^{n-1} \cdot 20 \cdot 101 = 20^{n-1} \cdot 2020 \div 2020$, pentru orice număr natural nenul	1p

3	Arătați că suma tuturor numerelor care împărțite la 2020 dau restul de două ori mai mare decât câtul, se poate scrie ca produsul a trei numere consecutive.	
4.	Aplică teorema împărțirii cu rest $d = i \cdot c + r$, $r = 2c$, $r < i$	1p
	Observă că restul maxim este 2018, deoarece $r = 2c = \text{par}$ și $r < 2020$	1p
	Numerele căutate sunt de forma: $x_n = 2020 \cdot c_n + 2 \cdot c_n = 2022 \cdot c_n$, unde $0 \leq c_n \leq 2018:2$	1p
	$S = x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2022 \cdot 0 + 2022 \cdot 1 + 2022 \cdot 2 + \dots + 2022 \cdot 1009$	2p
	$S = 2022 \cdot 1010 \cdot 1009 : 2$	1p
	$S = 1009 \cdot 1010 \cdot 1011$	1p
	Înainte de închiderea unui magazin mai erau patru clienți care au cumpărat toată cantitatea de pâine existentă. Să se afle câte pâini au fost, dacă fiecare client a cumpărat jumătate din cantitatea de pâine care se găsea în momentul când i-a venit rândul și încă o pâine.	
	Dacă toată cantitatea de pâine a fost cumpărată înseamnă că ultimul client a luat ultimele pâini. El a luat o pâine plus jumătate din cantitatea existentă, înainte de a lua el pâinea. Deduce că jumătate din cantitatea existentă este egală cu o pâine. Rezultă că ultimul client a luat $1+1=2$ pâini.	3p
	Cel de-al treilea client (penultimul) a luat o pâine plus jumătate din cea existentă; $1+2=3$ pâini reprezintă jumătatea; $2 \cdot 3 = 6$ pâini existau în magazin atunci când a venit rândul celui de al treilea.	2p
	Analog, deduce că al doilea client a luat 8 pâini, că primul client a luat 16 pâini.	1p
	În total au fost $2 + 4 + 8 + 16 = 30$ pâini.	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală-21 februarie 2020

CLASA A VI-A
SOLUȚII ȘI BAREM

1.	Se consideră mulțimile: $A = \{x \in N / x = 5n + 3, n \in N\}$ și $B = \{x \in N / x \leq 2020\}$. a) Determinați numărul de pătrate perfecte din mulțimea $A \cap B$; b) Determinați numărul de pătrate perfecte din mulțimea $A \cup B$.	
	a) Cazul I- dacă n =par rezultă că $u(5n)=0$ și $u(5n+3)=3$	1p
	Cazul II -dacă n =impar rezultă că $u(5n)=5$ și $u(5n+3)=8$	1p
	Deduce că orice număr de forma $5n+3$ nu este pătrat perfect și implicit mulțimea A nu conține niciun pătrat perfect.	1p
	$A \cap B$ nu conține niciun pătrat perfect	1p
	b) Calculează $44^2 = 1936$ și $45^2 = 2025$	1p
	Deduce că mulțimea B are 45 pătrate perfecte ($0^2, 1^2, 2^2, \dots, 44^2$)	1p
	Rezultă că $A \cup B$ are 45 pătrate perfecte	1p
2.	a) Determinați numărul prim p și numărul natural q astfel încât: $p^2 + 5^p + 31 = 3181^q$; G.M.	
	b) Determinați numerele prime a, b, c astfel încât: $\frac{a+2b}{13} = \frac{b+c}{7} = \frac{7c+a}{17}$. G.M.	
	a) Calculează ultima cifră $u(3181^q)=1$ pentru orice $q \in N$; p e număr prim, rezultă $p \geq 2 \Rightarrow u(5^p)=5$	1p
	Deduce că $u(p^2)=5$ rezultă $p^2 \div 5$, dar p e prim $\Rightarrow p=5$	1p
	$p^2 + 5^p + 31 = 5^2 + 5^5 + 31 = 3181 \Rightarrow q=1$	1p
	b) $\frac{a+2b}{13} = \frac{7c+a}{17} \Rightarrow 17(a+2b) = 13(7c+a) \Rightarrow 4a+34b=91c$	1p
	Deduce $91c$ =par, c =prim $\Rightarrow c=2$	1p
	$\frac{a+2b}{13} = \frac{b+2}{7} \Rightarrow 7(a+2b) = 13(b+2) \Rightarrow 7a+b=26$	1p
	Deduce $a=3, b=5$	1p
	3. a) După două scumpiri succesive de câte 20% fiecare, pretul unui obiect este de 2880 lei. Care a fost pretul inițial?	

	b) Bisectoarele unghiurilor adiacente $\angle AOB$ și $\angle BOC$ formează un unghi de 15°. Să se arate că: $150^\circ < 5 \cdot \angle AOB + 6 \cdot \angle BOC < 180^\circ.$	
	a) Fie y prețul produsului după prima scumpire; $\frac{120}{100} \cdot y = 2880$	1p
	Calculează $y = 2400$ lei	1p
	Fie x prețul produsului inițial $\frac{120}{100} \cdot x = 2400$	1p
	Calculează $x = 2000$	1p
	b) Fie OM și ON bisectoarele unghiurilor $\angle AOB$ și $\angle BOC$, atunci $\angle MON = 15^\circ$ $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 2\angle MOB + 2\angle BON = 2\angle MON = 30^\circ$	1p
	$5 \cdot \angle AOB + 6 \cdot \angle BOC > 5 \cdot \angle AOB + 5 \cdot \angle BOC$ $5 \cdot \angle AOB + 6 \cdot \angle BOC > 5 \cdot (\angle AOB + \angle BOC)$ $5 \cdot \angle AOB + 6 \cdot \angle BOC > 5 \cdot 30^\circ$	1p
	$5 \cdot \angle AOB + 6 \cdot \angle BOC < 6 \cdot \angle AOB + 6 \cdot \angle BOC$ $5 \cdot \angle AOB + 6 \cdot \angle BOC < 6 \cdot (\angle AOB + \angle BOC)$ $5 \cdot \angle AOB + 6 \cdot \angle BOC < 6 \cdot 30^\circ$	1p
4	În jurul punctului O se consideră unghiurile $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$ și $\angle EOA$, astfel încât măsurile lor sunt direct proporționale cu cinci numere naturale consecutive. Dacă $\frac{\angle AOB}{\angle BOE} = \frac{1}{3}$, arătați că punctele A, O, D sunt coliniare.	
	Fie a, b, c, d, e măsurile unghiurilor $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle DOE$ și $\angle EOA$; $\frac{a}{n} = \frac{b}{n+1} = \frac{c}{n+2} = \frac{d}{n+3} = \frac{e}{n+4}, n \in \mathbb{N}^*$	1p
	$\frac{\angle AOB}{\angle BOE} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{a+e} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3a = a+e \Rightarrow 2a = e$	1p
	$\frac{a}{n} = \frac{e}{n+4} \Rightarrow \frac{a}{n} = \frac{2a}{n+4} \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{2}{n+4} \Rightarrow n = 4$	1p
	$\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{6} = \frac{d}{7} = \frac{e}{8} = k \Rightarrow a = 4k, b = 5k, c = 6k, d = 7k, e = 8k$	1p
	$a + b + c + d + e = 360^\circ \Rightarrow 30k = 360^\circ \Rightarrow k = 12^\circ$	1p
	$a = 48^\circ, b = 60^\circ, c = 72^\circ, d = 84^\circ, e = 96^\circ$	1p
	$\angle AOD = \angle AOE + \angle EOD = 96^\circ + 84^\circ = 180^\circ \Rightarrow A, O, D$ coliniare	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală-21 februarie 2020

CLASA A VII-A
SOLUȚII ȘI BAREM

1.	a) Arătați că $x = \sqrt{\frac{5}{0,0(2)}} + \sqrt{\frac{55}{0,0(02)}} + \sqrt{\frac{555}{0,0(002)}}$ este un număr natural divizibil cu 9.	
	b) Oricare ar fi x număr întreg, arătați că numerele $a = \frac{3x+1}{2}$ și $b = \frac{5x-2}{4}$ nu pot fi simultan numere întregi.	
	a) Cunoaște că $0,0(2) = \frac{2}{90}$; $0,0(02) = \frac{2}{990}$; $0,0(002) = \frac{2}{9990}$.	1p
	Calculează $\frac{5}{0,0(2)} = 5 : \frac{2}{90} = 225 = 15^2$; $\frac{55}{0,0(02)} = 55 : \frac{2}{990} = 27225 = 165^2$; $\frac{555}{0,0(002)} = 555 : \frac{2}{9990} = 2772225 = 1665^2$	1p
	Calculează $x = 1845 \in \mathbb{N}$	1p
	$1 + 8 + 4 + 5 = 18 \Rightarrow x : 9$	1p
	b) Presupunem că există x cu proprietatea din enunț. Rezultă că $3x = 2a - 1$ și $5x = 4b + 2$.	1p
	Constată că $2a - 1 = \text{impar}$ oricare ar fi a număr întreg, $4b + 2 = \text{par}$ oricare ar fi b număr întreg.	1p
Rezultă că $3x = \text{impar}$ și $5x = \text{par}$. Contradicție.		1p
2.	a) Se consideră numerele raționale x, y, z astfel încât $xy + yz + zx = 2020$. Arătați că numărul $A = \sqrt{(2020 + x^2)(2020 + y^2)(2020 + z^2)}$ este rațional.	
	b) Fie numărul $x = 1 + \sqrt{7} + \sqrt{7}^2 + \sqrt{7}^3 + \dots + \sqrt{7}^{2020}$. Arătați că $x\sqrt{7} + 1 = x + 7^{1010} \cdot \sqrt{7}$.	
	a) $2020 + x^2 = xy + yz + zx + x^2 = y(x + z) + x(x + z) = (x + z)(x + y)$ Analog $2020 + y^2 = (x + y)(y + z)$ și $2020 + z^2 = (x + z)(y + z)$	2p
	Atunci $A = \sqrt{(x + y)^2 (y + z)^2 (z + x)^2} =$	1p
	$= (x + y)(y + z)(z + x) \in \mathbb{Q}$.	1p
	b) Calculează $x\sqrt{7} = \sqrt{7} + \sqrt{7}^2 + \sqrt{7}^3 + \dots + \sqrt{7}^{2021}$	1p
	$x\sqrt{7} + 1 = 1 + \sqrt{7} + \sqrt{7}^2 + \sqrt{7}^3 + \dots + \sqrt{7}^{2021} = x + \sqrt{7}^{2021}$	1p
$x\sqrt{7} + 1 = x + 7^{1010} \cdot \sqrt{7}$		1p

3.	Fie $ABCD$ un pătrat de latură l și M, N mijloacele laturilor BC , respectiv CD . a) Arătați că $AM \perp BN$. b) Arătați că $DT = l$, unde $\{T\} = AM \cap BN$.	
	a) $\triangle BAM \equiv \triangle CBN$ (C.C.) Rezultă că $\angle BAM = \angle CBN$; $\angle AMB = \angle BNC$;	1p
	În $\triangle BAM$: $\angle BAM + \angle AMB = 90^\circ$.	1p
	În $\triangle BTM$: $\angle BTM = \angle 180^\circ - (\angle TBM + \angle TMB) = 180^\circ - (\angle BAM + \angle AMB) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Rezultă că $AM \perp BN$.	1p
	b) Fie P mijlocul lui AB ; $DN = BP = \frac{l}{2}$; $DN \parallel BP$. Rezultă că $DPBN$ paralelogram	1p
	Fie $\{Q\} = DP \cap AM$; $DP \parallel BN \Rightarrow PQ \parallel BT$ și cum P este mijlocul lui AB rezultă că PQ linie mijlocie în $\triangle ABT \Rightarrow Q$ - mijlocul lui $AT \Rightarrow DQ$ mediană în $\triangle DAT$.	1p
	$BT \perp AM$, $PQ \parallel BT \Rightarrow PQ \perp AM \Rightarrow DQ \perp AT \Rightarrow DQ$ înălțime în $\triangle DAT$. Cum DQ - mediană și înălțime în $\triangle DAT \Rightarrow \triangle DAT$ isoscel $\Rightarrow DT = AD = l$	1p 1p
4.	Fie cercul $C(O, r)$ și A un punct exterior cercului astfel încât unghiul format de tangentele la cerc AM și AN ($M, N \in C(O, r)$) are măsura de 30° . Arătați că $\triangle MNP$ este echilateral, unde P este mijlocul segmentului AO . G. M. supliment	
	AM, AN tangente la cerc $\Rightarrow AM \perp OM, AN \perp ON, AM = AN$	1p
	AO - bisectoarea $\angle MAN \Rightarrow \angle OAM = \angle OAN = 15^\circ$; OA - bisectoarea $\angle MON$; $\angle AOM = \angle AON = 180^\circ - 15^\circ - 90^\circ = 75^\circ$.	1p
	MP, NP mediane în triunghiurile dreptunghice $MAO, NAO \Rightarrow MP = NP = \frac{AO}{2} \Rightarrow \triangle MNP$ isoscel.	1p
	$\triangle APM$ isoscel ($AP = PM$) $\Rightarrow \angle AMP = \angle MAP = 15^\circ$ și $\angle APM = 150^\circ$. Analog $\triangle APN$ isoscel ($AP = PN$); $\angle ANP = \angle PAN = 15^\circ$ și $\angle APN = 150^\circ$.	1p
	$\angle MPO = \angle NPO = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.	1p
	$\angle MPN = \angle MPO + \angle NPO = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.	1p
	$\triangle MPN$ isoscel, $\angle MPN = 60^\circ \Rightarrow \triangle MPN$ echilateral.	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală-21 februarie 2020

CLASA A VIII-A
SOLUȚII ȘI BAREM

1.	a) Aflați numerele $x, y \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\frac{x - y\sqrt{2020}}{y + \sqrt{2020}} = 2020$. b) Fie numerele reale nenule a, b, c, d astfel încât $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$. Calculați valoarea expresiei: $\frac{b+c+d}{a} + \frac{c+d+a}{b} + \frac{d+a+b}{c} + \frac{a+b+c}{d}.$ R.M.T.	
	a) $x - y\sqrt{2020} = 2020y + 2020\sqrt{2020}$ $x - 2020y = \sqrt{2020}(y + 2020)$	1p
	$x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x - 2020y \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2020} \cdot (y + 2020) \in \mathbb{Q} \Rightarrow y + 2020 = 0 \Rightarrow y = -2020$	1p
	Calculează $x = -2020^2$.	1p
	b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0 \Rightarrow (a+b+c+d) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) = 0$, unde $a+b+c+d \neq 0$.	1p
	$a \cdot \frac{1}{a} + a \cdot \frac{1}{b} + a \cdot \frac{1}{c} + a \cdot \frac{1}{d} + b \cdot \frac{1}{a} + b \cdot \frac{1}{b} + b \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{d} + c \cdot \frac{1}{a} + c \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{c} + c \cdot \frac{1}{d} + d \cdot \frac{1}{a} + d \cdot \frac{1}{b} + d \cdot \frac{1}{c} + d \cdot \frac{1}{d} = 0$	1p
	$1+1+1+1 + \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{d}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{d}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{d}{b} = 0.$	1p
	$\frac{b+c+d}{a} + \frac{c+d+a}{b} + \frac{d+a+b}{c} + \frac{a+b+c}{d} = -4$	1p
2.	Calculați: $S = [\sqrt{1 \cdot 3 + 8}] + [\sqrt{2 \cdot 4 + 8}] + \dots + [\sqrt{100 \cdot 102 + 8}]$ (unde am notat $[x]$ partea întreagă a lui x). G.M. supliment	
	Observă că termenii sumei sunt de forma $[\sqrt{n \cdot (n+2) + 8}]$ unde $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.	1p
	Arată că $(n+1)^2 < n \cdot (n+2) + 8$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.	1p
	$n(n+2) + 8 < (n+2)^2 \Rightarrow n^2 + 2n + 8 < n^2 + 4n + 4 \Rightarrow 2n > 4 \Rightarrow n > 2.$	1p

	$(n+1)^2 < n \cdot (n+2) + 8 < (n+2)^2$ pentru $n > 2, n \in \mathbb{N}$. $n+1 < \sqrt{n \cdot (n+2) + 8} < n+2$, pentru $n > 2, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lfloor \sqrt{n \cdot (n+2) + 8} \rfloor = n+1$, pentru $n > 2, n \in \mathbb{N}$.	1p
	Pentru $n=1, \lfloor \sqrt{1 \cdot 3 + 8} \rfloor = 3$; Pentru $n=2, \lfloor \sqrt{2 \cdot 4 + 8} \rfloor = 4$	1p
	$S = 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + \dots + 101 \Rightarrow S = 3 + 4 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 101) - (1 + 2 + 3)$	1p
	$S = 7 + 101 \cdot 51 - 6 \Rightarrow S = 5152$.	1p
3.	Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu muchia $2a$. a) Dacă O este centrul feței $ABCD$, calculați cosinusul unghiului format de dreptele BC și $D'O$. b) Calculați distanța de la punctul C' la planul $(A' D' O)$.	
	a) $AC = 2a\sqrt{2}$, $AO = a\sqrt{2}$; prin T. Pitagora în $\Delta A' AO \Rightarrow A'O = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} \Rightarrow A'O = a\sqrt{6} = D'O$.	1p
	$A'D' \parallel BC \Rightarrow \cos(\angle(BC, D'O)) = \cos(\angle(A'D', D'O)) = \cos(\angle A'D'O) =$	1p
	$= \frac{D'S}{D'O} = \frac{a}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, unde S = mijlocul lui $A'D'$.	1p
	b) Fie M, N – mijloacele laturilor AB și $CD \Rightarrow (A'D'O) = (A'MND')$. Construim $C'K \perp D'N$ (1) $A'D' \perp D'D, A'D' \perp D'C' \Rightarrow A'D' \perp (DCC'D')$; $C'K \subset (DCC'D') \Rightarrow A'D' \perp C'K$ (2) Din (1) și (2) $\Rightarrow C'K \perp (A'D'O) \Rightarrow d(C', (A'D'O)) = C'K$.	2p
	$C'K$ înălțime în $\Delta D'NC$; $D'N = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5} = C'N$ Fie $NT \perp D'C', T \in D'C' \Rightarrow C'K \cdot D'N = C'D' \cdot NT \Rightarrow C'K \cdot a\sqrt{5} = 2a \cdot 2a \Rightarrow$ $C'K = \frac{2a \cdot 2a}{a\sqrt{5}} \Rightarrow C'K = \frac{4a\sqrt{5}}{5}$	2p
4.	Rombul $ACMN$ și triunghiul echilateral ABC sunt situate în plane perpendiculare. Dacă $AB = a, m(\angle ACM) = 60^\circ, CQ \perp BM, Q \in BM, AP \perp BN, P \in BN$, atunci: a) Să se afle aria patrulaterului $ACQP$. b) Să se arate că planele (BMN) și $(ACQP)$ sunt perpendiculare.	
	a) $AB = AN = a \Rightarrow \Delta ABN$ isoscel, $AP \perp BN \Rightarrow [AP]$ - mediană $\Rightarrow P$ mijlocul $[BN]$ $BC = CM = a \Rightarrow \Delta BCM$ isoscel, $CQ \perp BM \Rightarrow [CQ]$ - mediană $\Rightarrow Q$ mijlocul $[BM]$ Rezultă $[PQ]$ linie mijlocie în $\Delta BMN \Rightarrow PQ \parallel MN \Rightarrow PQ \parallel AC$	1p
	Fie D – mijlocul $[AC]$; ΔABC – echilateral $\Rightarrow BD \perp AC, BD \subset (BCA)$; $(ABC) \cap (MCA) = AC, (ABC) \perp (MCA) \Rightarrow BD \perp (ACM) \Rightarrow BD \perp DM$ $BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; ΔACM – echilateral $\Rightarrow MD = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta BDM$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$	1p
	$DQ = BQ = QM = \frac{BM}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$	1p
	$\Delta AQM \equiv \Delta CQM (IC) \Rightarrow AQ = QC \Rightarrow \Delta QAC$ - isoscel; D – mijlocul $[AC] \Rightarrow QD \perp AC$	1p

	$A_{ACQP} = \frac{(AC + PQ) \cdot QD}{2} \Rightarrow A_{ACQP} = \frac{\left(a + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4}}{2} \Rightarrow A_{ACQP} = \frac{3a^2\sqrt{6}}{16}$	1p
	b) $CQ \perp BM, AQ \perp BM, CQ \cap AQ = \{Q\}, CQ, AQ \subset (ACQP) \Rightarrow BM \perp (ACQP)$ $\Rightarrow (BMN) \perp (ACQP).$	2p