

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ, 14.02.2014

Clasa a X-a

1. (4p) a) Arătați că, pentru orice numere complexe z_1, z_2 , are loc egalitatea:

$$4|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - 2z_2|^2 + |-2z_1 + z_2|^2 = 9|z_1|^2 + 9|z_2|^2.$$

(3p) b) Calculați în funcție de numerele complexe $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, n \in \mathbb{N}^*$, suma

$$\sum_{k=1}^n |S - tz_k|^2, \text{ unde } S = z_1 + z_2 + \dots + z_n, t \in \mathbb{N}^* ..$$

Ileana Oțoiu, Doriana Dorca

2. (7p) Fie $a \in (0, +\infty), n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și numerele:

$$x = \sqrt[n^{n-1}]{\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n^n]{a}\right)^{2^n}}, y = \sqrt[n]{\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n^{n^2+n}]{a}\right)^{n+1}}.$$

Arătați că $x^{2^n+1} = y$.

3. (7p) Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} 2^x + 3^x = 3y + 2 \\ 2^y + 3^y = 3z + 2 \\ 2^z + 3^z = 3x + 2 \end{cases}$$

Petru Vlad

4. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, a_1, a_2, \dots, a_n \in (0,1)$ sau $a_1, a_2, \dots, a_n \in (1, +\infty)$. Demonstrați inegalitățile:

$$(4p) \text{ a) } \log_{a_1} a_2 + 2\sqrt{\log_{a_2} a_3} + 3\sqrt[3]{\log_{a_3} a_1} \geq 6.$$

$$(3p) \text{ b) } \log_{a_1} a_2 + 2\sqrt{\log_{a_2} a_3} + 3\sqrt[3]{\log_{a_3} a_4} + \dots + n\sqrt[n]{\log_{a_n} a_1} \geq \frac{n(n+1)}{2}.$$

GM12/2013

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.