



Olimpiada de matematică
Faza locală 13.02.2015
Clasa a XI-a

Subiectul I

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. Să se calculeze A^n și $\det(A^n)$, unde n este un număr natural nenul.

Subiectul II

Se consideră matricele $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $B - A = I_n$. Ce condiție trebuie să îndeplinească matricea A astfel încât, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$, să aibă loc egalitatea

$$B + B^2 + \dots + B^k = kI_n + \frac{k(k+1)}{2} \cdot A ?$$

Subiectul III

Se consideră șirul $(u_n)_{n \geq 1}$ cu $u_0 = \frac{11}{4}$ și $u_{n+1} = \frac{5}{2} + \sqrt{u_n - \frac{7}{4}}$. Arătați că $(u_n)_{n \geq 1}$ este convergent și determinați limita sa.

Supliment Gazeta Matematică

Subiectul IV

Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$, $\forall n \geq 1$ și $x_0 \in \mathbb{R}$.
Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\ln n} = 1$.

Notă.

Toate problemele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.