

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Locală Dâmbovița – 21 Februarie 2016**

---

**CLASA A XI-A**

---

**Subiectul 1.** Se consideră matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 3 - \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & 3 + \cos 2\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

unde  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Demonstrați că  $A = B^{-1}CB$ , apoi calculați  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Subiectul 2.** Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit, pentru orice număr natural  $n \geq 1$ , prin relația:

$$x_n^3 + x_n = 2 - \frac{1}{n}.$$

Demonstrați că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este monoton, mărginit, apoi aflați limita sa.

**Subiectul 3.** Fie  $f, g, u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funcții continue, astfel încât pentru orice  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq u(x)$  și  $g(x) \geq v(x)$ . În plus,  $f(a) = u(a)$  și  $g(b) = v(b)$ . Demonstrați că există  $c \in [a, b]$  astfel încât  $f(c) + g(c) = u(c) + v(c)$ .

**Subiectul 4.** Fie  $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  două matrice astfel încât  $(A - B)^2 = 0_2$ .

a) Arătați că:  $\det(A^2 - B^2) = (\det A - \det B)^2$ .

b) Demonstrați echivalența:  $\det(AB - BA) = 0 \Leftrightarrow \det A = \det B$ .

GM