



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 16 februarie 2020
Clasa aVIII-a

Problema 1. Se dau numerele reale $x, y, z > 0$, diferite de 3. Dacă $x + y + z = 3$, arătați că

$$F(x, y, z) = \frac{x-y}{xy+3z} + \frac{y-z}{yz+3x} + \frac{z-x}{zx+3y} \text{ este constantă.}$$

Gazeta matematică

Soluție și barem de corectare:

$$F(x, y, z) = \frac{x-y}{xy+(x+y+z)z} + \frac{y-z}{yz+(x+y+z)x} + \frac{z-x}{zx+(x+y+z)y} \dots\dots\dots 1p$$

$$F(x, y, z) = \frac{x-y}{xy+xz+yz+z^2} + \frac{y-z}{yz+x^2+xy+xz} + \frac{z-x}{zx+xy+y^2+yz} \dots\dots\dots 1p$$

$$F(x, y, z) = \frac{x-y}{x(y+z)+z(y+z)} + \frac{y-z}{x(x+z)+z(x+z)} + \frac{z-x}{x(y+z)+y(y+z)} \dots\dots\dots 1p$$

$$F(x, y, z) = \frac{x-y}{(y+z)(x+z)} + \frac{y-z}{(x+z)(x+z)} + \frac{z-x}{(y+z)(x+y)} \dots\dots\dots 1p$$

$$F(x, y, z) = \frac{(x-y)(x+y)}{(y+z)(x+z)(x+y)} + \frac{(y-z)(y+z)}{(x+y)(x+z)(y+z)} + \frac{(z-x)(z+x)}{(y+z)(x+y)(z+x)} \dots\dots\dots 1p$$

$$F(x, y, z) = \frac{x^2-y^2+y^2-z^2+z^2-x^2}{(y+z)(x+z)(x+y)} \dots\dots\dots 1p$$

$$F(x, y, z) = 0 \dots\dots\dots 1p$$

Problema 2. a) Demonstrați că :

$$\frac{2}{x\sqrt{x+2} + (x+2)\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

b) Arătați că :

$$\frac{1}{1\sqrt{3} + 3\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{7} + 7\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{2023\sqrt{2025} + 2025\sqrt{2023}} \in (a; b) ,$$

unde a este media geometrică a numerelor 12,8 și 0,018, iar $b = \left(\frac{10}{7}\right)^{-2}$.

Soluție și barem de corectare:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2}{\sqrt{x}\sqrt{x+2} + (\sqrt{x+2})\sqrt{x}} &= \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x+2})} \dots\dots\dots 1p \\ \sqrt{x} \geq 0, \sqrt{x+2} > 0, \text{ deci } \sqrt{x}\sqrt{x+2} > 0; \\ \text{putem împărți cei doi membri ai egalității} \\ \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+2})} &= \sqrt{x+2} - \sqrt{x} \dots\dots\dots 1p \\ (\sqrt{x} + \sqrt{x+2})(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) &= 2 \\ x + 2 - x &= 2 \\ 2 &= 2 \dots\dots\dots 1p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \\ a &= \frac{48}{100}, b = \frac{49}{100} \dots\dots\dots 1p \end{aligned}$$

Conform a)

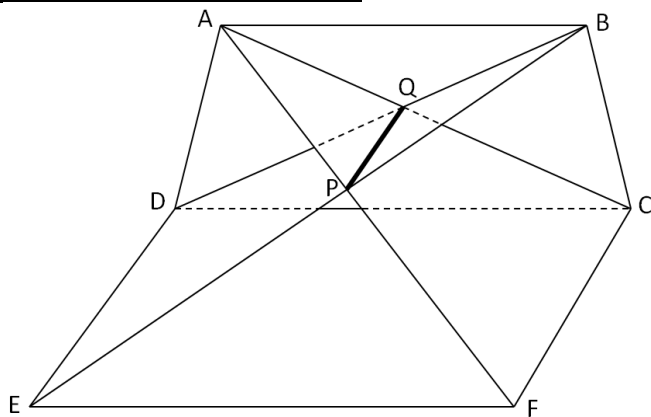
$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{1}{1\sqrt{3} + 3\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{7} + 7\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{2023\sqrt{2025} + 2025\sqrt{2023}} \right) \\ = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2023}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} \right) \dots\dots\dots 1p \\ = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} \\ = \frac{1}{1} - \frac{1}{45} \\ = \frac{44}{45} \dots\dots\dots 1p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Deci, } \frac{1}{1\sqrt{3} + 3\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{7} + 7\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{2023\sqrt{2025} + 2025\sqrt{2023}} &= \frac{44}{90} \\ \frac{48}{100} &< \frac{44}{90} < \frac{49}{100} \end{aligned}$$

$$\text{Prin urmare, } \frac{1}{1\sqrt{3} + 3\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{7} + 7\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{2023\sqrt{2025} + 2025\sqrt{2023}} \in (a; b) \dots\dots\dots 1p$$

Problema 3. Se dau trapezul $ABCD$ și rombul $DCFE$ situate în plane diferite. Baza mică a trapezului, $[AB]$, are lungimea de 4 cm, iar latura rombului are lungimea de 14 cm. Dacă $AC \cap BD = \{Q\}$ și $AF \cap BE = \{P\}$, să se calculeze PQ .

Soluție și barem de corectare:

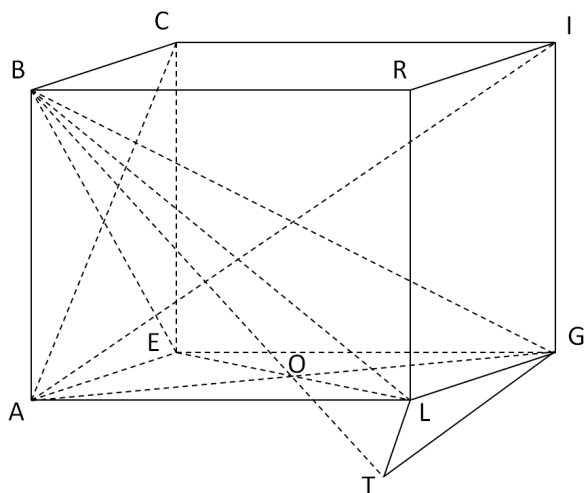


$\left. \begin{array}{l} (BDE) \cap (ACF) = PQ \\ DE \parallel CF \\ DE \subset (BDE) \\ CF \subset (ACF) \end{array} \right\} \xrightarrow{T_{\parallel}} PQ \parallel DE \parallel CF$	2p
$\left. \begin{array}{l} \triangle BDE \\ PQ \parallel DE \end{array} \right\} \xrightarrow{T.F.A.} \triangle BQP \sim \triangle BDE \Rightarrow \frac{BQ}{BD} = \frac{QP}{DE} \quad (1)$	1,5p
$\left. \begin{array}{l} \triangle AQB \\ AB \parallel CD \end{array} \right\} \xrightarrow{T.F.A.} \triangle AQB \sim \triangle CQD \Rightarrow \frac{QB}{QD} = \frac{AB}{CD} = \frac{2}{7}$	1,5p
Obținem $\frac{QB}{BD} = \frac{2}{9} \quad (2)$	1p
Din (1) și (2) se obține că $\frac{QP}{14} = \frac{2}{9} \Rightarrow QP = \frac{28}{9}$	1p

Problema 4. Se dă cubul notat *ALGEBRIC* de latură l .

- Demonstrați că $AI \perp (BEL)$;
- Calculați sinusul unghiului determinat de dreapta LG cu planul (BEL) .

Soluție și barem de corectare:



a) (3p)

$\left. \begin{array}{l} IC \perp (ABCE) \\ BE \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow IC \perp BE$	0,5p
$\left. \begin{array}{l} IC \perp BE \\ BE \perp AC \\ AC \cap IC = \{C\} \end{array} \right\} \Rightarrow BE \perp (AIC)$	1p
$\left. \begin{array}{l} BE \perp (AIC) \\ AI \subset (AIC) \end{array} \right\} \Rightarrow BE \perp AI \quad (1)$	0,5p
Analog, se arată că $EL \perp (AIG)$, de unde rezultă că $EL \perp AI \quad (2)$	0,75p
Din (1) și (2) obținem că $AI \perp (BEL)$	0,25p

O altă soluție este: 1.Se justifică că ABEL este piramidă regulată.(0,5p)

2. Se arată că punctul de intersecție dintre AI și BO, este centrul de greutate al triunghiului echilateral BEL și implicit va fi și centrul cercului circumscris acestui triunghi. (2p)

3.Din cele două condiții se obține concluzia.(0,5p)



b) (4p)

$\triangle BEL$ echilateral $\Rightarrow BO \perp EL$ $ABCD$ – pătrat $\Rightarrow GO \perp EL$ Fie $GT \perp BO, O \in (BT)$. Avem: $\left. \begin{array}{l} GO \perp EL \\ BO \perp EL \\ GT \perp BO, BO \cap EL = \{O\} \end{array} \right\} \xrightarrow{TRT_{3\perp}} GT \perp (BEL)$	1p
Așadar, $pr_{(BEL)} LG = LT$ și deci $m[\sphericalangle(LG, (BEL))] = m(\sphericalangle GLT)$	0,25p
BO înălțime în triunghi echilateral $\Rightarrow BO = \frac{l\sqrt{6}}{2}$	0,25p
Aplicând TP în $\triangle GTB$ și în $\triangle GTO$ obținem că $GB^2 - BT^2 = GO^2 - OT^2$	0,25p
$\Leftrightarrow GB^2 - GO^2 = BT^2 - OT^2$ $\Leftrightarrow \frac{5l^2}{2} = (BT - OT)(BT + OT)$ $\Leftrightarrow BT + OT = \frac{5l\sqrt{6}}{6}$	1p
Cum $BT - OT = BO = \frac{l\sqrt{6}}{2}$ obținem $2BT = \frac{4l\sqrt{6}}{3} \Rightarrow BT = \frac{2l\sqrt{6}}{3}$	0,75p
În $\triangle GTB \xrightarrow{TP} GT^2 = 3l^2 - \frac{24l^2}{9} \Rightarrow GT = \frac{l\sqrt{3}}{3}$	0,25p
În $\triangle GTL \Rightarrow \sin L = \frac{GT}{GL} \Rightarrow \sin L = \frac{\sqrt{3}}{3}$	0,25p



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală – Vaslui, 16 februarie 2020
Clasa a VI-a

Problema 1. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 2020\}$. Câte elemente ale mulțimii A nu sunt divizibile nici cu 28 și nici cu 42?

Soluție și barem de corectare:

$2020 = 28 \cdot 72 + 4$ Fie $A_1 = \{x \in A / x : 28\}$ $A_1 = \{28; 56; 84; \dots; 2016\}$ $A_1 = \{28 \cdot 1; 28 \cdot 2; 28 \cdot 3; \dots; 28 \cdot 72\}$ Card $A_1 = 72$	1p
$2020 = 42 \cdot 48 + 4$ Fie $A_2 = \{x \in A / x : 42\}$ $A_2 = \{42; 84; 126; \dots; 2016\}$ $A_2 = \{42 \cdot 1; 42 \cdot 2; 42 \cdot 3; \dots; 42 \cdot 48\}$ Card $A_2 = 48$	1p
$x : 28 \text{ și } x : 42 \Rightarrow x : [28; 42] \Rightarrow x : 84$	1p
$2020 = 84 \cdot 24 + 4$ $A_1 \cap A_2 = \{84 \cdot 1; 84 \cdot 2; 84 \cdot 3; \dots; 84 \cdot 24\}$ Card $A_1 \cap A_2 = 24$ (24 de elemente din A sunt divizibile și cu 28 și cu 42)	1p
Aplicăm principiul includerii și excluderii $Card(A_1 \cup A_2) = Card A_1 + Card A_2 - Card(A_1 \cap A_2) = 72 + 48 - 24 = 96$ (96 de elemente din A sunt divizibile cu 28 sau cu 42).	2p
$2020 - 96 = 1924$ elemente din A care nu sunt divizibile nici cu 28, nici cu 42.	1p



Problema 2. Se consideră numerele naturale nenule a, b, c, d astfel încât $a - b = 3, \frac{b}{c} = \frac{3}{2}$ și $\frac{c}{d} = 2$.

Determinați valorile naturale ale raportului $\frac{a}{d}$.

Gazeta matematică

Soluție și barem de corectare:

$\frac{b}{c} = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{3c}{2}$	0,5p
$\frac{c}{d} = 2 \Rightarrow d = \frac{c}{2}$	0,5p
$a - b = 3 \Rightarrow a = b + 3 \Rightarrow a = \frac{3c + 6}{2}$	1p
$\frac{a}{d} = \frac{3c + 6}{c}$	1p
$\frac{3c + 6}{c} \in \mathbb{N} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c / 3c + 6 \\ c / c \end{array} \right \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c / 3c + 6 \\ c / 3c \end{array} \right \Rightarrow c / 6 \Rightarrow c \in \{1, 2, 3, 6\}$	2p
Pentru $c=1$ și $c=3$ nu obținem b număr natural. Pentru $c=2$ și $c=6$ numerele a, b, d sunt naturale iar $\frac{a}{d}$ ia valorile 6 și 4.	2p



Problema 3. Fie unghiurile $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD, \sphericalangle DOA$ în jurul punctului O. Măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD$ sunt direct proporționale respectiv cu numerele 3, 6 și 7, iar măsurile unghiurilor $\sphericalangle BOC, \sphericalangle DOA$ sunt invers proporționale respectiv cu numerele $0, (3)$ și $0, 25$.

a) Calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD, \sphericalangle DOA$;

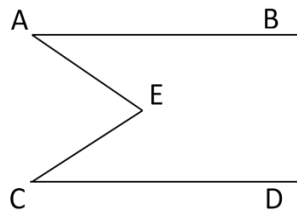
b) Fie $M \in Int(\sphericalangle BOC)$. Dacă $OM \perp OA$, atunci (OM este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$).

Soluție și barem de corectare:

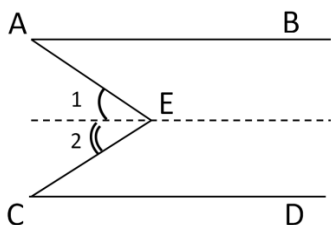
a) Notăm $m(\sphericalangle AOB) = a, m(\sphericalangle BOC) = b, m(\sphericalangle COD) = c, m(\sphericalangle DOA) = d$ $(a, b, c) d.p.(3, 6, 7) \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = k \Rightarrow a = 3k, b = 6k, c = 7k$	0,5p
$(b, d) i.p.(0, (3); 0, 25) \Rightarrow (b, d) d.p.(3, 4) \Rightarrow \frac{b}{3} = \frac{d}{4} = q \Rightarrow b = 3q, d = 4q$	0,5p
$6k = 3q \Rightarrow q = 2k$ $d = 8k$	1p
$a + b + c + d = 360^\circ \Rightarrow 24k = 360^\circ \Rightarrow k = 15$	1p
$a = 45^\circ$ $b = 90^\circ$ $c = 105^\circ$ $d = 120^\circ$	2p
b) $OM \perp OA \Rightarrow m(\sphericalangle AOM) = 90^\circ$	0,5p
$m(\sphericalangle BOM) = m(\sphericalangle AOM) - m(\sphericalangle AOB) = 45^\circ$ $m(\sphericalangle MOC) = m(\sphericalangle BOC) - m(\sphericalangle BOM) = 45^\circ$ $m(\sphericalangle BOM) = m(\sphericalangle MOC) = 45^\circ \Rightarrow (OM \text{ bisectoarea unghiului } \sphericalangle BOC)$	1,5p

**Problema 4.**

În figura alăturată cunoaștem că $AB \parallel CD$.



Demonstrați că $m(\angle AEC) = m(\angle BAE) + m(\angle ECD)$.

Soluție și barem de corectare:

Construim prin punctul E dreapta d , paralelă cu dreptele AB și CD .	3p
Din $AB \parallel d$ și AE - secantă obținem că $\angle BAE \equiv \angle E_1$ (alterne interne).	1,5p
Cum $CD \parallel d$ și CE - secantă rezultă că $\angle ECD \equiv \angle E_2$ (alterne interne).	1,5p
Așadar, $m(\angle AEC) = m(\angle E_1) + m(\angle E_2) = m(\angle BAE) + m(\angle ECD)$.	1p



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – Vaslui, 16 februarie 2020

Clasa aVII-a

Problema 1. În triunghiul ABC ascuțitunghic cu $m(\angle A) = 60^\circ$ se consideră $BD \perp AC (D \in AC)$, $CE \perp AB (E \in AB)$ și M mijlocul laturii BC . Arătați că triunghiul DEM este echilateral.

Gazeta matematică

Soluție și barem de corectare:

$EM = \frac{BC}{2}$ (mediană corespunzătoare ipotenuzei BC a triunghiului EBC) (1).....1,5 puncte

$DM = \frac{BC}{2}$ (mediană corespunzătoare ipotenuzei BC a triunghiului BDC) (2).....1,5 puncte

Din (1) și (2) rezultă că triunghiul DEM este isoscel (3).....1 punct

Se demonstrează că măsura unghiului EMD este 60° (4).....2 puncte

Din (3) și (4) ne rezultă că triunghiul DEM este echilateral.....1 punct

Problema 2. Se consideră numărul:

$$E = \sqrt{2^{3n} + 2^{3n+1} + 2^{3n+2} + \dots + 2^{3n+2020} + 2021}, n \in \mathbb{N}$$

și numerele raționale a și b .

a) Să se arate că $E = \sqrt{8^n \cdot 2^{2021} - 8^n + 2021}, n \in \mathbb{N}$.

b) Știind că n este divizibil cu 4 și $(a - 2020) \cdot E + 2b = 4040$, atunci să se calculeze media geometrică a numerelor raționale a și b .

Soluție și barem de corectare:

a) $E = \sqrt{2^{3n} + 2^{3n+1} + 2^{3n+2} + \dots + 2^{3n+2020} + 2021} = \sqrt{2^{3n}(2^0 + 2^1 + \dots + 2^{2020}) + 2021}$1punct

$E = \sqrt{8^n(2^{2021} - 1) + 2021} = \sqrt{8^n \cdot 2^{2021} - 8^n + 2021}, n \in \mathbb{N}$1punct

b) Știind că n este divizibil cu 4, atunci ultima cifră a lui $8^n \cdot 2^{2021} - 8^n + 2021$ este 7 sau 2, atunci

$8^n \cdot 2^{2021} - 8^n + 2021$ nu este pătrat perfect, așadar E este număr irațional.....1 punct

$2b$ și 4040 sunt numere raționale și $(a - 2020) \cdot E + 2b = 4040$, atunci $(a - 2020) \cdot E$ este rațional. Cum $a - 2020$ este rațional și E este irațional, atunci $(a - 2020) \cdot E$ este rațional pentru $a - 2020 = 0$,

adică $a = 2020$2 puncte

Dacă $a = 2020$, atunci $2b = 4040$, adică $b = 2020$1 punct

Media geometrică a numerelor a și b este 2020.....1 punct



Problema 3. În trapezul $ABCD$ cu $AD \parallel BC$ și $AC \cap BD = \{O\}$ se consideră P , Q și F mijloacele segmentelor BD , AC și, respectiv PQ .

a) Să se arate că $2 \cdot PQ = BC - AD$.

b) Să se arate că $2 \cdot OF < OP + OQ$.

Soluție și barem de corectare:

a) Se arată că linia mijlocie a trapezului intersectează diagonalele trapezului în P și, respectiv Q2 puncte

Dacă M este mijlocul laturii AB și N este mijlocul laturii DC , atunci $[MP]$ este linie mijlocie în triunghiul ABD și $[QM]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC de unde rezultă $MQ = \frac{BC}{2}$ și $MP = \frac{AD}{2}$.

Cum $PQ = MQ - MP \Rightarrow 2 \cdot PQ = BC - AD$2 puncte

b) Dacă $PF = FQ$ și punctul T este simetricul punctului O față de F , atunci $OPTQ$ este paralelogram și

$OQ = PT$2puncte

$OT = 2OF < OP + PT = OP + OQ$ (Într-un triunghi suma lungimilor a două laturi este mai mare decât lungimea celeilalte laturi).....1 punct

Problema 4. Dacă a este numărul de soluții reale ale ecuației :

$$|x+1| + |x| + |x-1| + \dots + |x-2018| = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} + \frac{3}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} + \dots + \frac{2018}{\sqrt{2019}-\sqrt{2020}}$$

și b este numărul de soluții naturale ale ecuației $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = 3^{2020} + 2021$ atunci să se calculeze $2020^a + b^{2020}$.

Soluție și barem de corectare:

$|x+1| + |x| + |x-1| + \dots + |x-2018| > 0$ oricare ar fi x număr real (1).....1punct

$$\sqrt{2} < \sqrt{3}, \sqrt{3} < \sqrt{4}, \dots, \sqrt{2019} < \sqrt{2020} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} + \frac{3}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} + \dots + \frac{2018}{\sqrt{2019}-\sqrt{2020}} < 0 \text{ (2).....1punct}$$

Din (1) și (2) avem că ecuația

$$|x+1| + |x| + |x-1| + \dots + |x-2018| = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} + \frac{3}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} + \dots + \frac{2018}{\sqrt{2019}-\sqrt{2020}}$$

nu are soluții reale, așadar $a = 0$ 1punct

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \text{ (3).....1punct}$$

Ultima cifră a numărului $3^{2020} + 2021$ este 2 $\Rightarrow 3^{2020} + 2021$ nu este pătrat perfect (4).....1 punct

Din (3) și (4) $\Rightarrow$ ecuația $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = 3^{2020} + 2021$ nu are soluții naturale $\Rightarrow b = 0$1punct

$$2020^a + b^{2020} = 2020^0 + 0^{2020} = 1 \text{.....1 punct}$$



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală – Vaslui, 16 februarie 2020
Clasa aV-a

Problema 1. Se consideră numărul: $A = \left\{ \left[(3^{n+2} + 3^{n+3} - 4 \cdot 3^{n+1}) : (2 \cdot 3^{n+3} - 5 \cdot 3^{n+2} - 3^n) \right]^2 \right\}^{10^2} \cdot (9^{640})^3$.

a) Arătați că $A = 9^{2020}$.

b) Scrieți numărul A ca suma dintre un pătrat perfect și un cub perfect nenul.

Soluție și barem de corectare:

a) $(3^{n+2} + 3^{n+3} - 4 \cdot 3^{n+1}) = 3^{n+1} \cdot 8 \quad (1,5p)$

$(2 \cdot 3^{n+3} - 5 \cdot 3^{n+2} - 3^n) = 3^n \cdot 8 \quad (1,5p)$

$A = 9^{100} \cdot 9^{1920} = 9^{2020} \quad (1p)$

b) $A = 9^{2019} (1+8) = 9^{2019} + 9^{2019} \cdot 8 = (3^{2019})^2 + (9^{673} \cdot 2)^3$

(1p) (1p) (1p)

Problema 2. Se consideră șirul: 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22,....., 100, 101, 102,

a) Al câtelea număr din șir este 2020?

b) Câte numere din șir, mai mici ca 2020, sunt pare, divizibile cu 3 dar nedivizibile cu 5?

Soluție și barem de corectare:

a) Obs: Numerele din șir sunt ordonate crescător și formate doar cu cifrele 0, 1 și 2. **(0,5p)**

Nr de o cifră: 0, 1, 2- 3 nr.

Nr de 2 cifre: 10, 11, 12, 20, 21, 22- 6 nr.

Nr de 3 cifre: 100, 101, 102

Numere de 4 cifre: 1000, 1001, 1002,

110, 111, 112

1010, 1011, 1012

120, 121, 122

1020, 1021, 1022

200, 201, 202

1100, 1101, 1102

210, 211, 212

1110, 1111, 1112

220, 221, 222 total 3x6=18 nr de 3 cifre.

1120, 1121, 1122

sau regula produsului 2x3x3

1200, 1201, 1202

(2p)

1210, 1211, 1212

1220, 1221, 1222

2000, 2001, 2002

2010, 2011, 2012

2020 total 3x11+1=34sau regula

produsului 1x3x3x3+ 7(cele cu 2 cifra miilor) **(2p)**

Deci numărul 2020 este pe locul 3+6+18+34=61. **(0,5p)**

b) Dacă numerele sunt pare și nedivizibile cu 5 atunci au ultima cifră 2. **(1p)**



Dintre acestea cele divizibile cu 3 sunt: 12, 102, 222, 1002, 1122, 1212 total 6 numere. **(1p)**

Problema 3. Aflați toate numerele $\overline{xyzt}$ care verifică relația $\overline{xyzt} = 2020 + 10 \cdot (y - t + x - z)$.

Gazeta matematică

Soluție și barem de corectare:

Observăm că membrul drept al egalității este divizibil cu 10 $\Rightarrow t = 0$. **(1p)**

Egalitatea din enunț este echivalentă cu $990x + 90y + 20z = 2020 \Leftrightarrow 99x + 9y + 2z = 202$.

(2,5p)

(1p)

Observăm că x poate lua valorile 1 și 2. **(1p)**

Cazul I. $x=2, y=0, z=2 \Rightarrow \overline{xyzt}=2020$ **(1p)**

Cazul II. $x=1, 9y+2z=99$, nu convine. **(0,5p)**

Problema 4. O ladă conține monede de aur. Cinci pirăți vor să-și împartă între ei în mod egal prada, dar rămân în plus 3 monede. Vine și al șaselea și dacă își împart și de această dată în mod egal monedele, rămân în plus 4 monede. După ce vine și al șaptelea pirat, împart prada în mod egal și nu mai rămâne nicio monedă în plus. Dacă în ladă a fost cel mai mic număr de monede care îndeplinește cele trei condiții, aflați câte monede erau în ladă?

Soluție și barem de corectare:

Fie n numărul de monede. Obținem:
$$\begin{cases} n = 5p + 3 \\ n = 6k + 4 \\ n = 7q(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n + 2 = 5(p + 1) \\ n + 2 = 6(k + 1) \end{cases}$$

(1,5p)

(2p)

Deci (n+2) se divide cu 5 și 6, prime între ele, de unde rezultă că (n+2) se divide cu 30.

(1p)

(1,5)

Ținând cont de (1) și de faptul că n este minim rezultă $n+2=30$. Deci $n=28$. **(1p)**