

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

28 februarie 2016

Clasa a XI-a

Barem de evaluare

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	Din ε soluție a ecuației $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0, \varepsilon \neq 1$; $\left. \begin{array}{l} \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 / \cdot (\varepsilon - 1) \\ \varepsilon - 1 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \varepsilon^3 - 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon^3 = 1;$	2p
	$S = \sum_{k=1}^{3n+1} \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} \\ k & k \cdot (k+1) & k! \cdot k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{3n+1} 1 & \sum_{k=1}^{3n+1} \varepsilon^k & \sum_{k=1}^{3n+1} \varepsilon^{2k} \\ \sum_{k=1}^{3n+1} k & \sum_{k=1}^{3n+1} k \cdot (k+1) & \sum_{k=1}^{3n+1} k! \cdot k \end{pmatrix};$	1p
	$\sum_{k=1}^{3n+1} 1 = 3n+1; \quad \sum_{k=1}^{3n+1} \varepsilon^k = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \dots + \varepsilon^{3n+1} = \frac{\varepsilon \cdot (\varepsilon^{3n+1} - 1)}{\varepsilon - 1} = \frac{\varepsilon \cdot (\varepsilon^{3n} \cdot \varepsilon - 1)}{\varepsilon - 1} = \varepsilon;$	1p
	$\sum_{k=1}^{3n+1} \varepsilon^{2k} = \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^6 + \dots + \varepsilon^{3n} + \varepsilon^{6n+2} = \frac{\varepsilon^2 \cdot (\varepsilon^{6n+2} - 1)}{\varepsilon^2 - 1} = \varepsilon^2;$	
	$\sum_{k=1}^{3n+1} k = \frac{(3 \cdot n + 1) \cdot (3n + 2)}{2}; \quad \sum_{k=1}^{3n+1} k \cdot (k+1) = \sum_{k=1}^{3n+1} k^2 + \sum_{k=1}^{3n+1} k =$ $\frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (6 \cdot n + 3)}{6} + \frac{(3n+1) \cdot (3n+2)}{2} = (3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (n+1);$	1p
	$\sum_{k=1}^{3n+1} k! \cdot k = \sum_{k=1}^{3n+1} k! \cdot (k+1-1) = \sum_{k=1}^{3n+1} [(k+1)! - k!] = (3n+2)! - 1;$	1p
	$S = \begin{pmatrix} 3 \cdot n + 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \frac{(3 \cdot n + 1) \cdot (3 \cdot n + 2)}{2} & (3 \cdot n + 1)(3 \cdot n + 2)(n + 1) & (3 \cdot n + 2)! - 1 \end{pmatrix}.$	1p

2.	a) Se calculează $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $X^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, Se deduce că $X^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$; Se demonstrează prin inducție matematică că $X^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$.	1p
	b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2016 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A \cdot B) = 1 \Rightarrow \det A \cdot \det B = 1 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow A$ este inversabilă. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2016 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = X^{2016} \Rightarrow B = A^{-1} \cdot X^{2016} \Rightarrow B \cdot A = A^{-1} \cdot X^{2016} \cdot A \Rightarrow$ $B \cdot A = A^{-1} \cdot \underbrace{X \cdot X \cdot X \cdot \dots \cdot X}_{\text{de 2016 ori}} \cdot A \Rightarrow$ $B \cdot A = A^{-1} \cdot \underbrace{X \cdot (A \cdot A^{-1}) \cdot X \cdot (A \cdot A^{-1}) \cdot X \cdot (A \cdot A^{-1}) \cdot \dots \cdot X \cdot (A \cdot A^{-1})}_{\text{de 2016 ori factorul } X \text{ și de 2015 ori factorul } (A \cdot A^{-1})} \cdot X \cdot A =$ $= \underbrace{(A^{-1} \cdot X \cdot A) \cdot (A^{-1} \cdot X \cdot A) \cdot (A^{-1} \cdot X \cdot A) \cdot \dots \cdot (A^{-1} \cdot X \cdot A)}_{\text{de 2016 ori}} = (A^{-1} \cdot X \cdot A)^{2016};$ $B \cdot A = (A^{-1} \cdot X \cdot A)^{2016} \Rightarrow A^{-1} \cdot X \cdot A = D.$	1p 1p 1p 1p
3.	a) În funcția f, substituind x cu $x+1$, obținem: $f(x) = -4 \cdot (x+1)^3 + 12 \cdot (x+1)^2 - 9 \cdot (x+1) + 1 \Rightarrow f(x) = -4x^3 + 3 \cdot x;$ $g_1(x) = f(\sin x) = -4 \sin^3 x + 3 \cdot \sin x = \sin(3x);$ $g_2(x) = f(\sin 3x) = -4 \sin^3 3x + 3 \cdot \sin 3x = \sin(3^2 x);$ Se demonstrează prin inducție matematică $g_n(x) = \sin(3^n x), n \geq 1;$ $a_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3^n x)}{x} = 3^n;$	2p 1p 2p
	b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \sin \frac{\pi}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \cdot \sin \frac{\pi}{3^n} = \pi.$	2p

	a) Cazul 1. Fie $b > 0$, $a \neq b$; $x_2 = \frac{b^2 - ab + a^2}{b} > a;$ Demonstrăm prin inducție matematică că $x_n > a$, $n \geq 2$: 1. $P(2)$: $x_2 > a$ (A) 2. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, $(\forall) n \geq 2$ Presupunem că $P(n)$ este adevărată Să demonstrăm că $P(n+1)$ este adevărată $P(n+1): x_{n+1} > a \Rightarrow \frac{x_n^2 - a \cdot x_n + a^2}{x_n} > a \Leftrightarrow (x_n - a)^2 > 0 (A)$ Așadar $x_n > a$, $n \geq 2$; $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 - a \cdot x_n + a^2}{x_n} - x_n = \frac{a \cdot (a - x_n)}{x_n} < 0 \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1} \text{ este strict descrescător} \Rightarrow \text{există } l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$ Dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit atunci $l \in \mathbb{R}$ și trecând la limită relația de recurență, obținem: $l = \frac{l^2 - a \cdot l + a^2}{l} \Leftrightarrow l = a \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1} \text{ este convergent.}$	2p
4.	Cazul 2. $a = b > 0 \Rightarrow x_n = a$, $(\forall) n \geq 1$ Deci, $(x_n)_{n \geq 1}$ este șir constant-nu convine. Cazul 3. $b < 0$; $x_1 = b < 0 \text{ și } x_{n+1} = \frac{\left(x_n - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3 \cdot a^2}{4}}{x_n}, (\forall) n \geq 1$ Se demonstrează prin inducție matematică că $x_n < 0$, $(\forall) n \geq 1$ $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 - a \cdot x_n + a^2}{x_n} - x_n = \frac{a \cdot (a - x_n)}{x_n} < 0 \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1} \text{ este strict descrescător} \Rightarrow$ există $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 0$; Dacă $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit atunci $l \in \mathbb{R}$ și trecând la limită relația de recurență, obținem: $l = \frac{l^2 - a \cdot l + a^2}{l} \Leftrightarrow l = a - \text{nu convine pentru că } l < 0, \text{ iar } a > 0;$ Așadar, $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător și nemărginit, adică are limita $-\infty$, pentru $b < 0 \Rightarrow$ $(x_n)_{n \geq 1}$ este divergent.	2p

	b) $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{2n-1} - x_{2n} = x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + \dots + x_{2n}$ (1) Egalitatea are loc și pentru $n+1$: $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{2n+1} - x_{2n+2} = x_{n+2} + x_{n+3} + \dots + x_{2n+2}$ (2); Scăzând din 2 pe 1 $\Rightarrow x_{2n+1} - x_{2n+2} = x_{2n+1} + x_{2n+2} - x_{n+1} \Rightarrow x_{n+1} = 2 \cdot x_{2n+2} \Rightarrow x_n = 2 \cdot x_{2n}, (\forall) n \geq 1$. Deci $x_1 = 2 \cdot x_2 = 2^2 \cdot x_4 = 2^3 \cdot x_8 = \dots = 2^n \cdot x_{2^n}$, adică $x_{2^n} = \frac{x_1}{2^n} < 1$. Cum $(x_n)_{n \geq 1}$ este monoton și $x_1 > 0 \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1}{2^n} = 0;$ Fie $k = [\log_2 n] \Rightarrow 2^k \leq n < 2^{k+1}$. $\begin{cases} (x_n)_{n \geq 1} \text{ este descrescător} \\ 2^k \leq n < 2^{k+1} \end{cases} \Rightarrow x_{2^{k+1}} < x_n \leq x_{2^k} \Rightarrow \frac{x_1}{2^{[\log_2 n]+1}} < x_n \leq \frac{x_1}{2^{[\log_2 n]}};$ Din teorema cleștelui $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.	1p 1p 1p
--	---	--