

Soluții clasa a XII-a:

1.a) $A(x) \cdot A(y) = A(x + y - 2xy)$. Pentru $x \neq \frac{1}{2}$ și $y \neq \frac{1}{2}$ rezultă că $x + y - 2xy \neq \frac{1}{2}$.

Se verifică asociativitatea și comutativitatea.

Se arată că elementul neutru este $A(0)$.

Se arată că elementul simetric este: $A(x') = A\left(\frac{x}{2x-1}\right)$, $x \neq \frac{1}{2}$.

b) Simetricul lui $A(2016)$ este $A\left(\frac{2016}{4031}\right)$.

c) $A^2(x) = A\left(\frac{1-(1-2x)^2}{2}\right)$, $A^3(x) = A\left(\frac{1-(1-2x)^3}{2}\right)$;

Prin inducție matematică se arată că $A^n(x) = A\left(\frac{1-(1-2x)^n}{2}\right)$.

2. a) Dacă $x \neq e \Rightarrow \text{ord}(x) = 2$. Cum $|G| = 2015$, din teorema lui Lagrange rezultă $2 \nmid 2015$, fals.

b) Fie $(G, *)$ și $(G', \circ)$ cele două grupuri, e - elementul neutru al lui G , e' - elementul neutru al lui G' și $f: G \rightarrow G'$ un morfism de grupuri. Atunci, pentru orice

$$x \in G: \underbrace{f(x) \circ f(x) \circ \dots \circ f(x)}_{\text{de 2015 ori}} = e' \text{ și } e' = f(e) = f\left(\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 2016 ori}}\right) = \underbrace{f(x) \circ f(x) \circ \dots \circ f(x)}_{\text{de 2016 ori}},$$

de unde $f(x) = e', \forall x \in G$.

3. a) Se notează integrala cu I și folosind substituția $x = \frac{1}{t}$ se obține:

$$I = \int_a^1 \frac{(t+1) \cdot f\left(\frac{1}{t}\right)}{t \cdot \sqrt{t^2+1}} dt = \int_a^1 \frac{(t+1) \cdot (k-f(t))}{t \cdot \sqrt{t^2+1}} dt \Rightarrow$$

$$I = \frac{k}{2} \cdot \left(\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt + \int_a^1 \frac{1}{t \cdot \sqrt{t^2+1}} dt \right) = k \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \Big|_{\frac{1}{a}}^1.$$

$$\begin{aligned} \text{b) Deoarece } \arctg x + \arctg \frac{1}{x} &= \frac{\pi}{2}, \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{(x+1) \cdot \arctg x}{x \cdot \sqrt{x^2+1}} dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \Big|_{\frac{1}{2}}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Pentru } \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{tg } x > x &\Rightarrow \int_0^a \sqrt[n]{\text{tg } x} dx > \int_0^a \sqrt[n]{x} dx = \\ &= a^{\frac{n+1}{n}}. \end{aligned}$$

Dar pentru $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sqrt[n]{\operatorname{tg} x} = \sqrt[n]{\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{n \text{ factori}} \operatorname{tg} x} \leq \frac{n-1+\operatorname{tg} x}{n}$.

Limita cerută este a .

4. Fie $I_1 = \int \frac{\sin x - \cos x}{1 + \cos x} \cdot e^x dx, x \in (0, \pi)$ și $I_2 = \int \frac{\sin x - \cos x}{1 - \cos x} \cdot e^x dx, x \in (0, \pi)$. Avem:

$$\frac{1}{2}(I_1 + I_2) = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x} \cdot e^x dx = \int \frac{e^x}{\sin x} dx + \int \left(\frac{1}{\sin x}\right)' \cdot e^x dx = \frac{e^x}{\sin x} + C \quad (1) \text{ și}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(I_2 - I_1) &= \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin^2 x} \cdot \cos x \cdot e^x dx = \int e^x \frac{\cos x}{\sin x} dx + \int \left(\frac{1}{\sin x}\right)' \cdot e^x \cos x dx = \int e^x \frac{\cos x}{\sin x} dx + e^x \frac{\cos x}{\sin x} - \\ &- \int \frac{e^x \cos x - e^x \sin x}{\sin x} dx = e^x \cdot \frac{\sin x + \cos x}{\sin x} + C. \quad (2) \end{aligned}$$

Din (1) și (2) rezultă că o primitivă a lui f este de forma:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{\sin x} \cdot (1 - \cos x - \sin x) + C_1, & x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ C_2, & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{e^x}{\sin x} \cdot (1 + \cos x + \sin x) + C_3, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

Din condiția ca F să fie continuă în $x = \frac{\pi}{2}$ se obține $C_1 = C_2 = C_3 + e^{\frac{\pi}{2}}$ și imediat se verifică

derivabilitatea lui F în $x = \frac{\pi}{2}$.