Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală Dâmbovița
17-02-2019
Barem - Clasa a V-a

SUBIECTUL 1

a) Aflaţi numerele naturale $\overline{ab}$ pentru care $3\cdot\overline{ab}$ este pătrat perfect.

b) Aflaţi numerele naturale $\overline{ab}$ cu proprietatea $\overline{ab}=(a+b)^2+a+b$.

a) $\overline{ab}$ este de forma $3\cdot k^2$. k poate fi: 2, 3, 4, 5.	**2p**
Numerele $\overline{ab}$ sunt: 12; 27; 48; 75.	**1p**
b) $10a + b = (a+b)^2 + a + b$.	**1p**
$9a = (a+b)^2$.	**1p**
9a este pătrat perfect și $a \neq 0$, rezultă că a poate fi: 1, 4, 9.	**1p**
Pentru a = 1 se obține b = 2; a = 4, b = 2; a = 9, b = 0. Numerele $\overline{ab}$ sunt: 12; 42; 90.	**1p**

SUBIECTUL 2

a) Determinaţi numerele prime a, b, c, ştiind că a + 6b + 9c = 63.

b) Determinaţi numerele prime a < b < c pentru care $a^4+b^4+c^4=15282$.

a) $6b\,\vdots\,3$, $9c\,\vdots\,3$, $63\,\vdots\,3 \Rightarrow a\,\vdots\,3$, a prim $\Rightarrow$ a = 3.	**1p**
Înlocuind pe a cu 3 în relația inițială se obține: 6b + 9c = 60, de unde 2b + 3c = 20. $2b\,\vdots\,2$, $20\,\vdots\,2 \Rightarrow 3c\,\vdots\,2$, c prim $\Rightarrow$ c = 2.	**1p**
Și apoi b = 7.	**1p**
b) Numerele a, b, c fiind prime și suma lor număr par, rezultă că nu pot fi toate impare, de unde a=2.	**1p**
Și atunci $b^4 + c^4 = 15266$.	**1p**
Dacă c > 11, atunci $b^4 + c^4 > 15266$. Iar dacă $c \leq 7$, atunci $b^4 + c^4 < 15266$.	**1p**
De unde c = 11 și apoi b = 5.	**1p**

SUBIECTUL 3

a) Arătați că pentru x = y = 6 și z = 7 numărul $6^x+6^y+6^z$ este cub perfect.

b) Arătați că există o infinitate de triplete (x, y, z) de numere naturale, astfel încât numărul $6^x+6^y+6^z$ să fie cub perfect.

a) $6^6 + 6^6 + 6^7 = 6^6(2 + 6) = 6^6\cdot 8 = (6^2\cdot 2)^3$. Sau 72^3.	**3p**
b) Analizând exemplul dat la a) se arată că pentru x = y = 3k și z = 3k + 1, numărul $6^x + 6^y + 6^z$ este cub perfect, pentru orice k număr natural.	**2p**
Astfel: $6^x + 6^y + 6^z = 6^{3k} + 6^{3k} + 6^{3k+1} = 6^{3k}(1 + 1 + 6) = 6^{3k}\cdot 8 = (6^k\cdot 2)^3$.	**2p**

SUBIECTUL 4

a) Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$, știind că $\overline{abc} = 8(\overline{ab} + c)$.

b) Determinaţi numerele naturale $\overline{abc}$, știind că $\overline{abc} = 5c(a\cdot b - 6)$.

a) $10\cdot\overline{ab} + c = 8\cdot\overline{ab} + 8c$.	**1p**
$2\cdot\overline{ab} = 7c$.	**1p**
$c \in \{4, 6, 8\} \Rightarrow \overline{abc} \in \{144, 216, 288\}$.	**1p**
b) $5\,\vert\,\overline{abc}$, $c \neq 0 \Rightarrow c = 5$.	**1p**
Atunci $\overline{ab5} = 25(ab - 6)$, ab – 6 este impar, rezultă a și b impare.	**1p**
Cum $25\,\vert\,\overline{ab5}$, rezultă b = 7.	**1p**
Și atunci 100a + 75 = 25(7a – 6), de unde a = 3 și $\overline{abc} = 375$.	**1p**

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală Dâmbovița
17-02-2019
Barem - Clasa a VI-a

SUBIECTUL 1

a) Arătați că $\overline{1xy1xy}$ este divizibil cu 11, oricare ar fi cifrele x și y.

b) Determinați numerele de forma $\overline{987xy6}$ divizibile cu 33.

a) $\overline{1xy1xy} = \overline{1xy} \cdot 1001 = \overline{1xy} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \vdots 11$. Sau utilizând criteriul cu 11: $(1+x+y) - (1+x+y) = 0 \vdots 11$.	**3p**
b) Avem: $\overline{987xy6} = 987006 + \overline{xy0} = 33 \cdot 29909 + 9 + \overline{xy0}$. Şi atunci $\overline{xy0} = 33k - 9$.	**2p**
Se obţin soluţii dacă ultima cifră a numărului natural k este 3 şi $33k - 9$ are cel mult trei cifre, rezultă $k \in \{3, 13, 23\}$.	**1p**
De unde $\overline{xy} \in \{09, 42, 75\}$. Se obţin numerele: 987096, 987426 şi 987756.	**1p**

SUBIECTUL 2

a) Dacă y = 6, aflați valoarea numărului natural x care verifică egalitatea $\frac{3x^3+2y^2}{2x^3+3y^2} = \frac{4}{3}$.

b) Arătați că există o infinitate de perechi (x, y) de numere naturale care verifică egalitatea $\frac{3x^3+2y^2}{2x^3+3y^2} = \frac{4}{3}$.

a) Înlocuind y = 6 se obține $\frac{3x^3+72}{2x^3+108} = \frac{4}{3}$.	**1p**
De unde $9x^3 + 216 = 8x^3 + 432$.	**1p**
Se obține $x^3 = 216$, de unde x = 6.	**1p**
b) $3(3x^3 + 2y^2) = 4(2x^3 + 3y^2) \Leftrightarrow 9x^3 + 6y^2 = 8x^3 + 12y^2 \Leftrightarrow x^3 = 6y^2$.	**2p**
Dacă $y = 6k^3$ se obține $x = 6k^2$. Și atunci perechile $(6k^2, 6k^3)$, $k \in \mathbb{N}^*$ verifică egalitatea.	**2p**

SUBIECTUL 3

a) Aflați măsurile a două unghiuri, știind că raportul lor este $\frac{3}{5}$, iar suma măsurilor complementelor lor este 108^0.

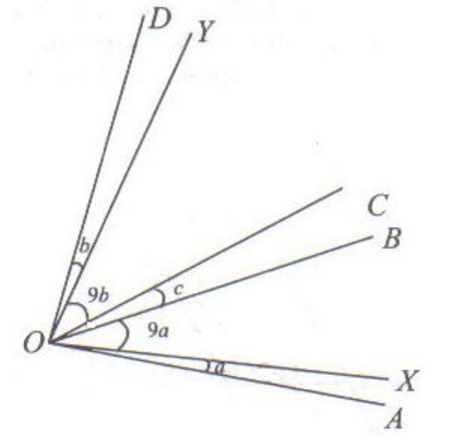
b) Fie semidreptele [OA, [OX, [OB, [OC, [OY și [OD în această ordine, astfel încât $m(\sphericalangle AOD) = 8 \cdot m(\sphericalangle BOC)$, $m(\sphericalangle BOX) = 9 \cdot m(\sphericalangle AOX)$, $m(\sphericalangle YOC) = 9 \cdot m(\sphericalangle DOY)$.

Calculați $\frac{m(\sphericalangle XOY)}{m(\sphericalangle BOC)}$.

a)

Dacă a și b sunt măsurile unghiurilor, atunci $a + b = 180^0 - 108^0 = 72^0$.	**1p**
Având și $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ se obține $a = 27^0$ și $b = 45^0$.	**2p**

b)

	Fie $m(\sphericalangle AOX)=a$, $m(\sphericalangle DOY)=b$ și $m(\sphericalangle BOC)=c$. Atunci $m(\sphericalangle BOX)=9a$, $m(\sphericalangle COY)=9b$ și $m(\sphericalangle AOD)=8\cdot m(\sphericalangle BOC)=8c$.	**1p**
	Avem 10a + 10b + c = 8c, de unde $\frac{a+b}{c}=\frac{7}{10}$.	**1p**
	$\frac{m(\sphericalangle XOY)}{m(\sphericalangle BOC)}=\frac{9(a+b)+c}{c}$.	**1p**
	$\frac{m(\sphericalangle XOY)}{m(\sphericalangle BOC)}=9\cdot\frac{7}{10}+1=\frac{73}{10}$.	**1p**

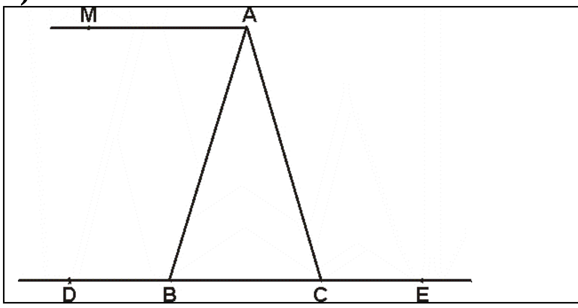
<u>SUBIECTUL 4</u>

Pe o dreaptă se consideră în ordine punctele D, B, C, E și fie A un punct care nu aparține dreptei.

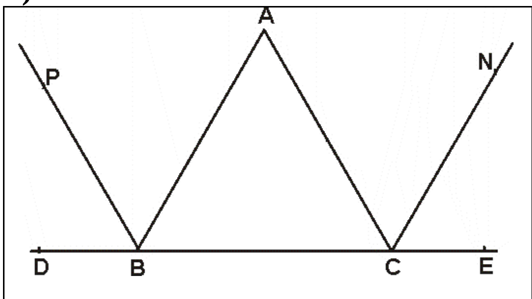
a) Dacă $\widehat{ABD}\equiv\widehat{ACE}$, iar M este în interiorul unghiului ABD, astfel încât $\widehat{MAB}\equiv\widehat{ACB}$. Demonstrați că AM || BC.

b) Dacă [BP și [CN sunt bisectoarele unghiurilor ABD, respectiv ACE, iar BP || AC și CN || AB, aflaţi măsura unghiului BAC.

a)

	$\widehat{ABD}\equiv\widehat{ACE}\Rightarrow\widehat{ABC}\equiv\widehat{ACB}$.	**1p**
	Dar $\widehat{ACB}\equiv\widehat{MAB}\Rightarrow\widehat{ABC}\equiv\widehat{MAB}\Rightarrow$ AM || BC.	**2p**

b)

	AC || BP $\Rightarrow\widehat{ABP}\equiv\widehat{BAC}$, iar AB || CN $\Rightarrow\widehat{ACN}\equiv\widehat{BAC}$.	**1p**
	Și atunci $\widehat{ABP}\equiv\widehat{ACN}\Rightarrow\widehat{ABD}\equiv\widehat{ACE}\Rightarrow\widehat{ABC}\equiv\widehat{ACB}$.	**1p**
	Cum $\widehat{ACB}\equiv\widehat{DBP}$ (AC || BP), rezultă $m(\widehat{DBP})=m(\widehat{ABP})=m(\widehat{ABC})=180^0:3=60^0=m(\widehat{BAC})$.	**2p**

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală Dâmbovița
17-02-2019
Barem - Clasa a VII-a

SUBIECTUL 1

a) Fie $A=\frac{3}{1\cdot2}+\frac{4}{2\cdot3}+\frac{5}{3\cdot4}+\frac{6}{4\cdot5}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$. Arătați că $\sqrt{A}<0,9$.

b) Demonstrați că: $\frac{3}{1\cdot2}+\frac{4}{2\cdot3}+\frac{5}{3\cdot4}+\ldots+\frac{n+2}{n(n+1)}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}\right)<2$,

oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

a) $A=\left(\frac{3}{1\cdot2}-1\right)+\left(\frac{4}{2\cdot3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{5}{3\cdot4}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{6}{4\cdot5}-\frac{1}{4}\right)=$	**1p**
$=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}=\frac{4}{5}$.	**1p**
$\sqrt{0,8}<0,9 \Leftrightarrow 0,8<0,81$.	**1p**
b) Relația se mai scrie: $\left(\frac{3}{1\cdot2}-1\right)+\left(\frac{4}{2\cdot3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{5}{3\cdot4}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{n+2}{n(n+1)}-\frac{1}{n}\right)<1$.	**1p**
De unde $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}<1$.	**1p**
Relație echivalentă cu $1-\frac{1}{n+1}<1$ care este adevărată.	**2p**

SUBIECTUL 2

a) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $\frac{x+1000}{10}=\frac{1000}{x+10}$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $\frac{x+1}{2}-\frac{3}{y+1}=4$.

Varianta 1 de notare pentru **a)**:

$\frac{x+1010}{10}=\frac{x+1010}{x+10}$.	**1p**
$(x+1010)\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{x+10}\right)=0$.	**1p**
$x+1010=0$ sau $\frac{1}{10}-\frac{1}{x+10}=0$. $S=\{-1010, 0\}$.	**1p**

Varianta 2 de notare pentru **a)**:

$(x+10)(x+1000)=10000$.	**1p**
$x^2+1010x=0$.	**1p**
$x(x+1010)=0$. $S=\{-1010, 0\}$.	**1p**

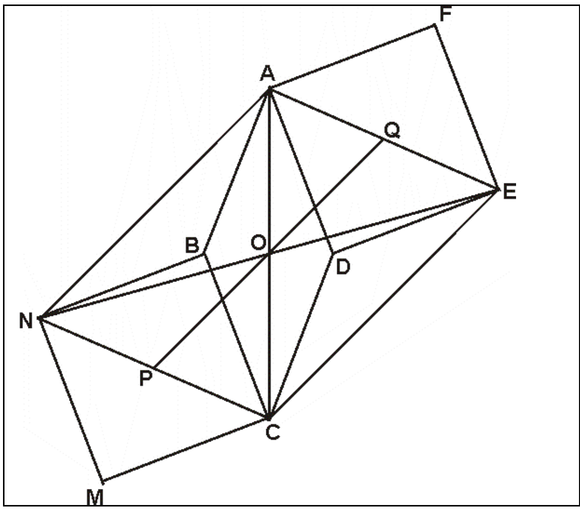
b) Înmulțind ecuația cu 2 se obține $x+1-\frac{6}{y+1}=8$.	Sau: ecuația este echivalentă cu $\frac{x-7}{2}=\frac{3}{y+1}$, de unde $(x-7)(y+1)=6$.	**1p**
$y+1\in D_6=\{1, 2, 3, 6\}$, de unde $y\in\{0, 1, 2, 5\}$.		**1p**
Se obțin soluțiile $(x, y)\in\{(13, 0), (10, 1), (9, 2), (8, 5)\}$.		**2p**

<u>SUBIECTUL 3</u>

În exteriorul rombului ABCD se construiesc pătratele BCMN și ADEF.

a) Demonstrați că AN || CE.

b) Arătați că centrele celor două pătrate și centrul rombului sunt puncte coliniare.

	**a)** $\Delta ABN\equiv\Delta CDE$(LUL) $\Rightarrow$ AN=EC.	**1p**
	$\Delta ADE\equiv\Delta CBN$(LUL) $\Rightarrow$ AE=NC.	**1p**
	Rezultă ANCE este paralelogram, de unde AN || CE.	**1p**
	b) Fie $AC\cap NE=\{O\}$, P centrul pătratului BCMN, iar Q centrul pătratului ADEF. OP este linie mijlocie în $\Delta ACN \Rightarrow$ OP || AN(1) OQ este linie mijlocie în $\Delta AEN \Rightarrow$ OQ || AN(2).	**2p**
	Din (1) și (2) $\Rightarrow$ P, O, Q coliniare.	**2p**

<u>SUBIECTUL 4</u>

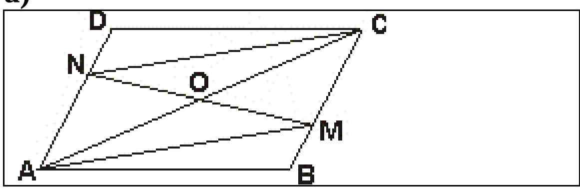
Fie ABCD un paralelogram, $M\in(BC)$, $N\in(AD)$, astfel încât BM = DN, $\{O\}=MN\cap AC$.

Arătați că:

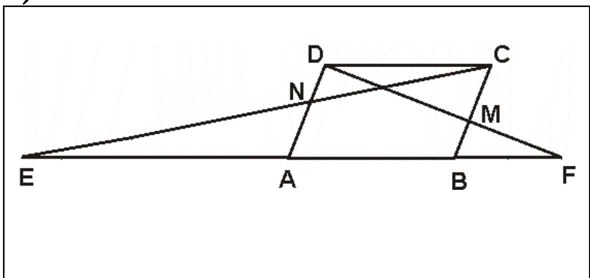
a) OM = ON.

b) Dacă $\{E\}=CN\cap AB$, $\{F\}=DM\cap AB$, atunci AB este media geometrică între AE și BF($AB=\sqrt{AE\cdot BF}$).

a)

	BC = AD și BM = DN $\Rightarrow$ AN = CM, cum AN || CM, rezultă AMCN este paralelogram, de unde OM = ON.	**3p**

b)

	Aplicând de patru ori teorema lui Thales avem: $\frac{AB}{AE}=\frac{NC}{NE}=\frac{ND}{NA}=\frac{MB}{MC}=\frac{MF}{MD}=\frac{BF}{AB}$.	**2p**
	De unde $\frac{AB}{AE}=\frac{BF}{AB}$.	**1p**
	Se obține $AB^2=AE\cdot BF$ sau $AB=\sqrt{AE\cdot BF}$.	**1p**

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală Dâmbovița
17-02-2019
Barem - Clasa a VIII-a

SUBIECTUL 1

a) Arătaţi că perechea $\left(1-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ este soluție a ecuației $x^2 + y^2 - xy^2 - xy + y = 1$.

b) Aflaţi perechile (x, y) de numere reale pentru care $x^2 + y^2 - xy^2 - xy + y = 1$.

a) $\left(1-\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}\right)^2-\left(1-\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}=$	**1p**
$=1-2\sqrt{2}+2+2-2+2\sqrt{2}+\sqrt{2}-2-\sqrt{2}=1$.	**2p**
b) Ecuația se mai scrie: $x^2 - 1 - y^2(x - 1) - y(x - 1) = 0$.	**1p**
Echivalentă cu $(x - 1)(x - y^2 - y + 1) = 0$.	**1p**
De unde x=1 și y este orice număr real sau $x = y^2 + y - 1$ și y este orice număr real. Perechile sunt: (1, y) sau $(y^2 + y - 1, y)$ cu y număr real.	**2p**

SUBIECTUL 2

a) Dați un exemplu de trei numere raționale diferite a, b, c, astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ și pentru exemplul dat calculați valoarea numărului $N=\left(\frac{ab}{c}+1\right)\left(\frac{bc}{a}+1\right)\left(\frac{ca}{b}+1\right)$.

b) Să se arate că dacă a, b, c sunt numere raționale nenule, astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, atunci numărul $N=\left(\frac{ab}{c}+1\right)\left(\frac{bc}{a}+1\right)\left(\frac{ca}{b}+1\right)$ este nenegativ, iar $\sqrt{N}\in\mathbb{Q}$.

a) Un exemplu este a = 2, b = 3, c = 6.	**1p**
Și $N=\left(\frac{2\cdot 3}{6}+1\right)\left(\frac{3\cdot 6}{2}+1\right)\left(\frac{6\cdot 2}{3}+1\right)=2\cdot 10\cdot 5=100$.	**2p**
Obs: Pentru orice exemplu de forma: a = 1, b = n, c = –n, $n \geq 2$, se obține N = 0.(**3p**)	
b) Din relația dată se obține $ab = abc - bc - ac$, de unde $\frac{ab}{c} = ab - a - b$ și $\frac{ab}{c}+1 = (a - 1)(b - 1)$.	**2p**
Și atunci $N = [(a - 1)(b - 1)(c - 1)]^2 \geq 0$, iar $\sqrt{N} = \lvert(a - 1)(b - 1)(c - 1)\rvert \in \mathbb{Q}$.	**2p**

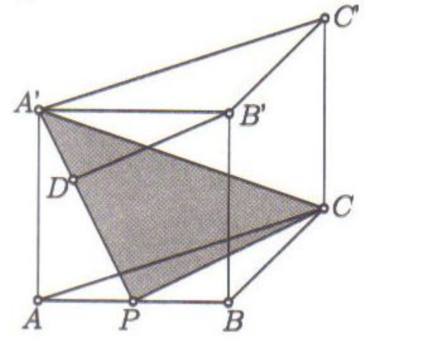
SUBIECTUL 3

Fie ABCA’B’C’ o prismă triunghiulară regulată cu AB = AA’ = 2a.

a) Dacă P este mijlocul muchiei AB, calculați distanța de la B’ la planul (A’PC).

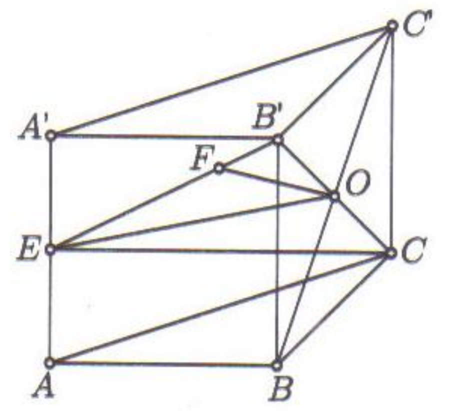
b) Dacă E este mijlocul muchiei AA’, calculați distanța dintre dreptele EB’ și BC’.

a)



CP $\perp$ AB și CP$\perp$ AA’, AB$\cap$AA’={A} $\Rightarrow$ CP$\perp$ (ABB’A’).	**1p**
Și atunci construind B’D$\perp$ A’P, D$\in$ A’P, B’D$\perp$ CP, A’P$\cap$CP={P} $\Rightarrow$ B’D$\perp$ (A’PC) rezultă că distanța de la B’ la planul (A’PC) este egală cu B’D.	**1p**
Cum A’P·B’D=A’B’·AA’ $\Rightarrow$ $a\sqrt{5}\cdot B'D=4a^2 \Rightarrow$ $B'D=\dfrac{4a\sqrt{5}}{5}$.	**1p**

b)



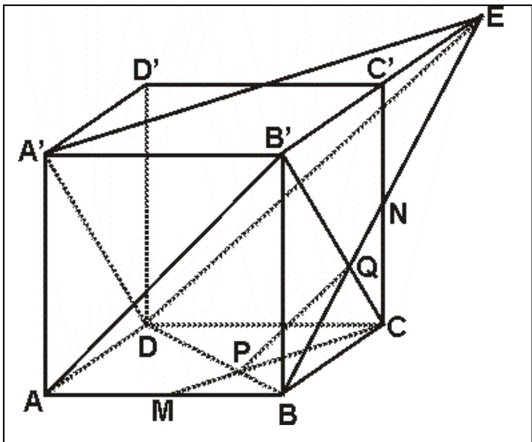
Fie {O} = BC’$\cap$B’C. Cum EB = EC’ și EO este mediană în ΔEBC’, rezultă BC’$\perp$ EO și cum BC’$\perp$ B’C, EO$\cap$B’C={O} se obține BC’$\perp$ (EB’C).	**1p**
Și atunci OF$\perp$ B’E, F$\in$ (B’E) reprezintă distanța dintre dreptele EB’ și BC’.	**1p**
Lungimea lui OF se calculează din triunghiul dreptunghic OB’E. $OF=\dfrac{OB'\cdot OE}{B'E}=\dfrac{a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{3}}{a\sqrt{5}}=\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.	**2p**

SUBIECTUL 4

În cubul ABCDA’B’C’D’ de muchie a se consideră punctele M şi N mijloacele muchiilor AB, respectiv CC’. Dacă {P} = DB$\cap$CM şi {Q} = BN$\cap$B’C, calculaţi:

a) Distanţa de la punctul A’ la dreapta de intersecţie a planelor (BDQ) şi (AB’D).

b) Măsura unghiului dintre dreptele PQ şi A’D.



a) Fie BN$\cap$B’C’={E}. Punctele D şi E aparţinând ambelor plane, rezultă dreapta de intersecţie a planelor este DE.	**1p**
A’D=a$\sqrt{2}$, A’E=a$\sqrt{5}$ şi DE=a$\sqrt{3}$, se deduce că ΔA’DE este dreptunghic în D şi atunci distanţa este A’D=a$\sqrt{2}$.	**2p**
b) Avem $\dfrac{BQ}{EQ}=\dfrac{BC}{B'E}=\dfrac{1}{2}$ şi $\dfrac{BP}{DP}=\dfrac{MB}{DC}=\dfrac{1}{2}$ se obţine $\dfrac{BQ}{EQ}=\dfrac{BP}{DP}$ şi din reciproca teoremei lui Thales rezultă PQ || DE.	**2p**
Şi atunci $m\left(\widehat{PQ,A'D}\right)=m\left(\widehat{DE,A'D}\right)=90^0$.	**2p**