

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 1.02.2020

Clasa a XI-a

1. (7p) Se consideră funcția $f: R \rightarrow R, f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos x + |x - 1| e^{nx}}{1 + e^{nx}}$. Determinați mulțimea punctelor $x_0 \in R$ în care funcția f are limită.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(R)$ și $M(A) = \{X \in M_3(R) \mid X \cdot A = A \cdot X\}$. Demonstrați că :
- $\forall X \in M(A), \exists a, b, c \in R$ astfel încât $X = a \cdot I_3 + b \cdot A + c \cdot A^2$.
- a) (3p)
- $\forall X, Y \in M(A), X \cdot Y = Y \cdot X$
- b) (4p)

3. Demonstrați că :

$$\forall X, Y \in M_2(R), \det(X + Y) + \det(X - Y) = 2(\det X + \det Y)$$

a) (2p)

- b) (5p) Dacă $A, B \in M_2(R)$ pentru care există $n \in N^*$ astfel încât $(AB - BA)^n = (AB - BA)^{n+1}$,
- $\det(AB + BA) = 4 \det A \cdot \det B$
- atunci

4. Se consideră șirul $(a_n)_{n \in N^*}$ cu $a_1 \in (0, 1)$ și $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1, \forall n \in N^*$. Calculați limitele:

a) (5p) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;

b) (2p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.