

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 10.02.2024
Clasa a XII-a

1.

a) (4p) Arătați că un grup nu se poate scrie ca reuniunea a două subgrupuri proprii.

b) (3p) Este posibil ca un monoid să se scrie ca reuniunea a doi submonoizi proprii?

2. Fie $(M, \cdot)$ un monoid cu cel puțin două elemente, în care există un element a cu proprietatea că $a \cdot x = a$, $\forall x \in M$ și $(M \setminus \{a\}, \cdot)$ este grup.

a) (4p) Arătați că $x \cdot a = a, \forall x \in M$ și dați exemplu de astfel de monoid.

b) (3p) Mai rămâne adevărată afirmația de la punctul a) dacă se renunță la ipoteza ca $(M \setminus \{a\}, \cdot)$ să fie grup?

3. (7p) Determinați funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, știind că admite o primitivă F astfel încât

$$xf(x) + F(x) = \frac{x+1}{x(1+xe^x)}, \quad \forall x \in (0, \infty) \text{ și } F(1) = 1 - \ln(1+e).$$

4. (7p) Determinați valoarea lui $a \in (2, 4)$ pentru care $\int_2^4 \frac{a+1-x}{1+|a-x|} dx = \ln 4$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.