

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a IX-a M₁

Soluții și bareme

$$1. \left[\frac{4x+4}{4x-5} \right] = \frac{2x-1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{3} = t, t \in \mathbb{Z} \\ \left[\frac{4x+4}{4x-5} \right] - \frac{2x-1}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ \left[\frac{6t+6}{6t-3} \right] - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ \left[\frac{2t+2}{2t-1} - t \right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq \frac{2t+2}{2t-1} - t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

....2p

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq \frac{-2t^2+3t+2}{2t-1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq \frac{-2t^2+3t+2}{2t-1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ (-2t^2+3t+2)(2t-1) \geq 0 \\ \frac{-2t^2+t+3}{2t-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ (2t^2-3t-2)(2t-1) \leq 0 \\ (2t^2-t-3)(2t-1) > 0 \end{cases}$$

....2p

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ (2t+1)(t-2)(2t-1) \leq 0 \\ (2t-3)(t+1)(2t-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ t \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \\ t \in \left(-1, \frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3t+1}{2}, t \in \mathbb{Z} \\ t \in \left(-1, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2 \right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ x = \frac{7}{2} \end{cases}$$

....2p

$$S = \left\{ \frac{7}{2} \right\}.$$

....1p

$$2. a) 4x^3 + 4x^2 - 7x + 2 = (x+2)(2x-1)^2 \geq 0, (\forall) x \in [-2, \infty).$$

....3p

$$b) \text{ Dacă } a=b=c=-2 \Rightarrow k \geq \frac{7}{4}, \text{ dacă } a=b=c=\frac{1}{2} \Rightarrow k \leq \frac{7}{4}, \text{ deci singura valoare posibilă pentru } k \text{ este } \frac{7}{4} \quad \dots 1p$$

$$\text{Din a) rezultă } a^3 + a^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{7}{4}a, \quad b^3 + b^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{7}{4}b, \quad c^3 + c^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{7}{4}c, \text{ de unde prin sumare, rezultă } \dots 2p$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{7}{4}(a+b+c), \text{ deci } k = \frac{7}{4}.$$

....1p

3. Demonstrăm prin inducție matematică. Facem verificarea pentru primele 3 valori ale lui n (vezi figura aălturată).1p

Apoi presupunem $P(k)$: “Pătratul poate fi împărțit în k pătrate” adevărată și demonstrăm $P(k+3)$: “Pătratul poate fi împărțit în $k+3$ pătrate”.

1	2	3
4	6	
5		

1	2	5
3	4	
6		7

1	2	3	4
5	8		
6			
7			

.....2p

Pentru demonstrație se observă că prin împărțirea unui pătrat din cele k în 4, obținem $k+3$ pătrate.4p

4. a) Fie M mijlocul lui $[BC]$ și G centrul de greutate al triunghiului ABC . Construim BGCN paralelogram. Atunci vom avea:

(1) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GN}$ (reg. paralelog.). Din BGCN paralelogram $\Rightarrow BC \cap GN = \{M\}$, mijlocul lui $[BC]$1p

Dar A, G, M coliniare și G, M, N coliniare, deci A, G, M, N coliniare. Avem următoarele relații vectoriale:

$\overrightarrow{GN} = 2\overrightarrow{GM}$ și $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}$ (G fiind centrul de greutate al $\triangle ABC$).1p

Introducând în relația (1), obținem: $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GN} = -\overrightarrow{GA} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow$ 1p

$\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{GO} \Rightarrow$ 1p

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ 1p

b) A, B, C pot fi vârfurile unui triunghi dacă și numai dacă A, B, C necoliniare.1p

A, B, C coliniare $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ a.i. } \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (a-1)\vec{i} + (b-1)\vec{j} = k(\vec{i} + \vec{j}) \Leftrightarrow a-1 = b-1 = k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = b (=k+1)$ Deci A, B, C sunt vârfurile unui triunghi dacă și numai dacă $a \neq b$1p

Olimpiada Națională de Matematică Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a IX-a M₂

Soluții și bareme

$$1. \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}, (\forall) a, b \in \mathbb{R} \quad (\forall) x, y \in \mathbb{R}_+^*.$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 y + b^2 x}{xy} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \Leftrightarrow (pt. ca \ x+y > 0 \text{ si } xy > 0) \ (a^2 y + b^2 x)(x+y) \geq (a+b)^2 xy \quad \dots 3p$$

$$\Leftrightarrow \cancel{a^2 xy} + a^2 y^2 + b^2 x^2 + \cancel{b^2 xy} \geq \cancel{a^2 xy} + 2abxy + \cancel{b^2 xy} \Leftrightarrow a^2 y^2 - 2abxy + b^2 x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0 \quad (\forall) a, b \in \mathbb{R}; (\forall) x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad (\text{pătratul oricărui număr real este pozitiv}) \quad \dots 4p$$

2.a) Până la sfârșitul anului sunt 10 luni, iar producția se va dubla de $10 : 2 = 5$ ori. Deci se vor fabrica

$$540 \left(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 \right) = 540 \cdot 2 \cdot \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 33480 \text{ perechi de pantofi.} \quad \dots 3p$$

b) $276840 : 2 = 138240$ perechi de pantofi, de unde $540 \cdot 2^n = 138240 \Leftrightarrow 2^n = 138240 : 540 \Leftrightarrow 2^n = 256 \Leftrightarrow n = 8$, deci după 8 grupe de câte 2 luni, adică 16 luni (1 an și 4 luni), în iulie 2014 se va obține producția de 276480 pantofi.4p

$$3. \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} \text{ adevărat, deoarece ABCD paralelogram} \quad \dots 7p$$

$$4. a) \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^* \quad \dots 1p$$

$$b) S_5 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{5 \cdot 6} \stackrel{a)}{=} \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}. \quad \dots 1p$$

$$c) S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \stackrel{a)}{=} \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \quad \dots 1p$$

$$d) S_n < \frac{11}{12} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{11}{12} \stackrel{n \in \mathbb{N}^*}{\Leftrightarrow} 12n < 11n+11 \Leftrightarrow n < 11 \text{ si } n \in \mathbb{N}^*, n \text{ maxim} \Rightarrow n = 10. \quad \dots 2p$$

$$e) S_n > \frac{111}{112} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} > \frac{111}{112} \stackrel{n \in \mathbb{N}^*}{\Leftrightarrow} 112n > 111n+111 \Leftrightarrow n > 111 \text{ si } n \in \mathbb{N}^*, n \text{ minim} \Rightarrow n = 112. \quad \dots 2p$$

Olimpiada Națională de Matematică

Etapă locală - 15.02.2014

Clasa a X-a M₁

Soluții și bareme

1) Afirmația este adevărată.1p

Exemplu: $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ și $b = \sqrt{2}$2p

Dacă $a \in \mathbb{Q}$, atunci acesta este exemplul de număr irațional: $\sqrt{2}$, care ridicat la numărul irațional $\sqrt{2}$ dă număr rațional.1p

Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a^{\sqrt{2}} = \left[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \right]^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Q}$, deci $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $a^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$3p

2) $e = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ este una dintre rădăcinile complexe nereale ale unității.1p

Aceasta verifică ecuațiile: $z^3 = 1$ și $z^2 + z + 1 = 0$,1p

iar $\bar{e} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^2$ este cea de-a doua rădăcină complexă nereală a celor două ecuații.1p

Deci $e^2 + e + 1 = 0$, $e^3 = 1$, $e^4 = e$. Atunci vom avea:1p

$$\begin{aligned}
 (z-1)^2 + (z-e)^2 + (z-\bar{e})^2 &= z^2 - 2z + 1 + z^2 - 2e + e^2 + z^2 - 2\bar{e} + \bar{e}^2 = z^2 - 2z + 1 + z^2 - 2e + e^2 + z^2 - 2e^2 + e = \\
 &= 3z^2 - 2z \underbrace{(e^2 + e + 1)}_0 + \underbrace{(e^2 + e + 1)}_0 = 3z^2
 \end{aligned}$$

....3p

3) Facem următoarele notații:

$$\lg a = x, \lg b = y, \lg c = z$$

$$\text{Atunci: } \lg^2 \left(\frac{ab}{c} \right) + \lg^2 \left(\frac{bc}{a} \right) + \lg^2 \left(\frac{ca}{b} \right) = (\lg a + \lg b - \lg c)^2 + (\lg b + \lg c - \lg a)^2 + (\lg c + \lg a - \lg b)^2 =$$

$$= (x + y - z)^2 + (y + z - x)^2 + (z + x - y)^2$$

....2p

$$\lg \frac{abc}{\sqrt[4]{1000}} = \lg a + \lg b + \lg c - \frac{3}{4} = x + y + z - \frac{3}{4} \quad \dots\dots 1p$$

Inegalitatea din enunț devine :

$$(x + y - z)^2 + (y + z - x)^2 + (z + x - y)^2 \geq x + y + z - \frac{3}{4} \Leftrightarrow \quad \dots\dots 1p$$

$$3(x^2 + y^2 + z^2) + \cancel{2xy} - \cancel{2xz} - \cancel{2yz} + \cancel{2yz} - \cancel{2xy} - 2xz + \cancel{2xz} - 2xy - 2yz \geq x + y + z - \frac{3}{4} \Leftrightarrow \quad \dots\dots 1p$$

$$(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 + x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z + \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \quad \dots\dots 1p$$

$$(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \quad \dots\dots 1p$$

Cum suma pătratelor unor numere reale este pozitivă, oricare ar fi numerele respective, ultima afirmație este adevărată.

4) Aplicăm inegalitatea mediilor pentru numerele reale pozitive: $2^{\sin^2 x}, 2^{\cos^2 x}$:1p

$$\frac{2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x}}{2} \geq \sqrt{2^{\sin^2 x} \cdot 2^{\cos^2 x}} = \sqrt{2^{\sin^2 x + \cos^2 x}} = \sqrt{2} \quad \dots\dots 2p$$

Dar conform ecuației din enunț, rezultă că mediile sunt egale, egalitatea având loc dacă și numai dacă numerele sunt egale. Deci:1p

$$2^{\sin^2 x} = 2^{\cos^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$\text{dar pentru } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \sin x > 0, \cos x > 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}. \quad \dots\dots 3p$$

Olimpiada Națională de Matematică

Etapă locală - 15.02.2014

Clasa a X-a M₂

Soluții și bareme

1. Prin ridicare la puterea a 3-a, obținem $38 + 17\sqrt{5} = (a + b\sqrt{5})^3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 38 + 17\sqrt{5} = a^3 + 3a^2b\sqrt{5} + 15ab^2 + 5b^3\sqrt{5} \Leftrightarrow 38 + 17\sqrt{5} = \underbrace{(a^3 + 15ab^2)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(3a^2b + 5b^3)}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{5} \Leftrightarrow$ 3p

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + 15ab^2 = 38 \\ 3a^2b + 5b^3 = 17 \end{cases}$ (altfel, am ajunge la contradicția $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$), de unde1p

$\begin{cases} a(a^2 + 15b^2) = 38 \\ b(3a^2 + 5b^2) = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a, b > 0 \\ b | 17 \\ b \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$ 3p

2. $E = \frac{\log_2 x^2 + \log_2 x^3 + \dots + \log_2 x^{2014}}{\log_7 x^3 + \log_7 x^4 + \dots + \log_7 x^{2014}} = \frac{2\log_2 x + 3\log_2 x + \dots + 2014\log_2 x}{3\log_7 x + 4\log_7 x + \dots + 2014\log_7 x} = \frac{\log_2 x(2+3+\dots+2014)}{\log_7 x(3+4+\dots+2015)} =$ 3p

$= \frac{\log_2 x \cdot \frac{(2+2014) \cdot 2013}{2}}{\log_7 x \cdot \frac{(3+2015) \cdot 2013}{2}} = \frac{1008 \cdot \log_2 x}{1009 \cdot \log_7 x} = \frac{1008 \cdot \frac{\lg x}{\lg 2}}{1009 \cdot \frac{\lg x}{\lg 7}} = \frac{1008 \cdot \lg 7}{1009 \cdot \lg 2},$ 3p

adică este independentă de x , pentru orice $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$1p

3. Condiții de existență: $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x^2 - 3x + 2 \neq 1 \\ 16 - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right\} \\ x \in (-4, 4) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4, 1) \cup (2, 4) \setminus \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$ 5p

și cum $x \in \mathbb{Z}$, obținem $x \in \{-3, -2, -1, 0, 3\}$,1p

iar suma acestora este -31p

4. Fie $z = a + bi$, unde $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 1p

Ecuția se rescrie: $a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=8+4i \Leftrightarrow (a+\sqrt{a^2+b^2})+bi=8+4i \Leftrightarrow \begin{cases} a+\sqrt{a^2+b^2}=8 \\ b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4 \\ \sqrt{a^2+16}=8-a \end{cases} . \quad \dots\dots 3p$

Se impune condiția de compatibilitate $8-a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 8 \Leftrightarrow a \in (-\infty, 8]$, \dots\dots 1p

prin ridicare la pătrat obținem $a^2+16=64-16a+a^2 \Leftrightarrow 16a=48 \Leftrightarrow a=3$, \dots\dots 2p

deci soluția ecuației este $z=3+4i$. \dots\dots 1p

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală - 15.02.2014
Clasa a XI-a M₁

Soluții și bareme

1. a) Dezvoltând determinantul obținem: $f(x) = e^{2x^2+2x+2a} + 2e^{-x^2-x-a} - 3 = e^{2(x^2+x+a)} + \frac{2}{e^{(x^2+x+a)}} - 3$ 2p

Notând : $e^{(x^2+x+a)} = t > 0$, ecuația $f(x) = 0$ devine :

$$t^2 + \frac{2}{t} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^3 - 3t + 2}{t} = 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2(t+2)}{t} = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(t+2) = 0 \Rightarrow t_1 = 1 > 0; t_2 = -2 < 0$$
1p

Revenind la notație, vom avea : $e^{(x^2+x+a)} = 1 \Rightarrow x^2 + x + a = 0 (*)$.

Ecuția are soluții reale $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4a \geq 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$1p

a) Ecuția $f(x) = 0$ are toate soluțiile strict negative $\Leftrightarrow$ ecuația (*) are soluțiile x_1, x_2 strict negative.....1p

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \text{ unde } S = x_1 + x_2 = -1; P = x_1 \cdot x_2 = a \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow$$
1p

$$\begin{cases} a \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \\ -1 < 0 \text{ adevărat} \Leftrightarrow a \in \left(0, \frac{1}{4}\right] \\ a \in (0, \infty) \end{cases}$$
1p

2. 1) $\Rightarrow$ 2) $A+B+B^2+\dots+B^{k-1}=O_n \mid \cdot B \Rightarrow AB+B^2+\dots+B^{k-1}+B^k=O_n \xRightarrow{AB=A+B} \underbrace{A+B+B^2+\dots+B^{k-1}}_{O_n} + B^k = O_n \Rightarrow B^k = O_n$ 3p

2) $\Rightarrow$ 1) Știm că $B^k = O_n, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Demonstrăm prin metoda inducției matematice afirmația de la (1)1p

$$P(k): A+B+B^2+\dots+B^{k-1}=O_n, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$$

I) $P(2): A+B=O_n$ de verificat

$$O_n = B^2 = AB^2 = (AB)B \stackrel{AB=A+B}{=} (A+B)B = AB+B^2 \stackrel{B^2=O_n}{=} AB = A+B \Rightarrow A+B=O_n \Rightarrow P(2) \text{ adevărat.}$$
1p

$$II) P(k) \rightarrow P(k+1)$$

$$P(k): A + B + B^2 + \dots + B^{k-1} = O_n, \text{ pentru } k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \text{ fixat, ipoteză de inducție}$$

$$P(k+1): A + B + B^2 + \dots + B^{k-1} + B^k = O_n, \text{ trebuie demonstrat}$$

$$\text{Din } P(k) \Rightarrow A + B + \dots + B^{k-1} = O_n \mid + B^k (= O_n) \Rightarrow A + B + B^2 + \dots + B^{k-1} + B^k = O_n \Rightarrow P(k+1): A + B + B^2 + \dots + B^{k-1} + B^k = O_n \text{ adevărat.} \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$3. \sum_{k=1}^n \frac{k^2 - k + 1}{k^4 + k} = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 - k + 1}{(k^4 + k)} = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 - k + 1}{k(k^3 + 1)} = \sum_{k=1}^n \frac{\cancel{k^2 - k + 1}}{k(k+1)(\cancel{k^2 - k + 1})} = \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\sum_{k=1}^n \frac{k^2 - k + 1}{k^4 + k}} \right)^{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \right)^{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{n^2+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{-1}} \right]^{\frac{-(n^2+1)}{n(n+1)}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad \dots\dots\dots 3p$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} x^a (\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^a (\sqrt{x+1} - \sqrt{x} - \sqrt{x} + \sqrt{x-1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^a \left(\frac{\cancel{\sqrt{x+1}} - \cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} + \frac{\cancel{\sqrt{x-1}} - \cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} \right) = \quad \dots\dots\dots 2p$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x^a \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} + \frac{-1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^a \left(\frac{\sqrt{x-1} + \cancel{\sqrt{x}} - \sqrt{x+1} - \cancel{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})} \right) = \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x^a \left(\frac{\cancel{\sqrt{x-1}} - 1 - \cancel{\sqrt{x}} - 1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})} \right) = \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^a}{x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right) \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 \right) \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)} \stackrel{not}{=} l \quad \dots\dots\dots 2p$$

Discuție:

$$1) \text{ Pentru } a < \frac{3}{2} \Rightarrow l = 0 \quad 2) \text{ Pentru } a = \frac{3}{2} \Rightarrow l = -\frac{1}{4} \quad 3) \text{ Pentru } a > \frac{3}{2} \Rightarrow l = -\infty \quad \dots\dots\dots 1p$$

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a XI-a M₂

Soluții și bareme

1. $D = \mathbb{R} \Rightarrow$ nu există asimptote verticale. Cum $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty \Rightarrow$ nu există asimptote orizontale.2p

Studiem existența asimptotei oblice la $-\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{x} = -1, \quad \text{.....1p}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\underbrace{\sqrt{x^2 + 2}}_{\infty} + \underbrace{x}_{-\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} + 2 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + 2} - x} = \frac{2}{\infty} = 0, \quad \text{.....1p}$$

deci $y = -x$ asimptotă oblică la $-\infty$0,5p

Studiem existența asimptotei oblice la $+\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{x} = 1, \quad \text{.....1p}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\underbrace{\sqrt{x^2 + 2}}_{\infty} - \underbrace{x}_{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2} + 2 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \frac{2}{\infty} = 0, \quad \text{.....1p}$$

deci $y = x$ asimptotă oblică la $+\infty$0,5p

$$2. \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x \\ 2 & x & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + L_2 + L_3} \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3 \\ 1 & 2 & x \\ 2 & x & 1 \end{vmatrix} = (x+3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 2 & x & 1 \end{vmatrix} = (x+3) \cdot (2+x+2x-4-x^2-1) = (x+3) \cdot (-x^2+3x-3) \quad \text{.....4p}$$

Cum determinantul este nul $\Leftrightarrow (x+3) \cdot (-x^2+3x-3) = 0$, adică $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ 1p

sau $-x^2+3x-3=0$, dar $\Delta = -3 < 0$ și ecuația nu are soluții reale. Deci $S = \{-3\}$2p

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{\operatorname{tg}(x^3 - 1)} \cdot \frac{e^{x^2 - 1}}{x^4 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{\frac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1}}^{\nearrow 1} \cdot \cancel{(x-1)}(x+1)}{\underbrace{\frac{\operatorname{tg}(x^3 - 1)}{x^3 - 1}}_{\searrow 1} \cdot \cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)} \cdot \frac{\overbrace{\frac{e^{x^2 - 1} - 1}{x^2 - 1}}^{\nearrow 1} \cdot \cancel{(x^2 - 1)}}{\cancel{(x^2 - 1)}(x^2 + 1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}. \quad \text{.....7p}$$

$$4. a) \det(A + 3I_3) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 48 + 3 = 51. \quad \text{.....2p}$$

$$b) A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, A^5 = A^3 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ și } \quad \text{.....1p}$$

$$A^5 + 4A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3. \quad \text{.....1p}$$

$$c) \text{ Din (b) } \Rightarrow A^5 + 4A = O_3 \Rightarrow A^5 = -4A, A^9 = A^5 \cdot A^4 = -4A^5 = (-4)^2 A, A^{13} = A^9 \cdot A^4 = (-4)^2 A^5 = (-4)^3 A, \dots, A^{2013} = (-4)^{503} A \Rightarrow \quad \text{.....1p}$$

$$A + A^5 + A^9 + \dots + A^{2013} = A + (-4)A + (-4)^2 A + \dots + (-4)^{503} A = \left[1 + (-4) + (-4)^2 + \dots + (-4)^{503} \right] A = \quad \text{.....1p}$$

$$= \frac{(-4)^{504} - 1}{-4 - 1} A = \frac{1 - 4^{504}}{5} A. \quad \text{.....1p}$$

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală - 15.02.2014
Clasa a XI-a M₁

Soluții și bareme

1. a) Dezvoltând determinantul obținem: $f(x) = e^{2x^2+2x+2a} + 2e^{-x^2-x-a} - 3 = e^{2(x^2+x+a)} + \frac{2}{e^{(x^2+x+a)}} - 3$ 2p

Notând : $e^{(x^2+x+a)} = t > 0$, ecuația $f(x) = 0$ devine :

$$t^2 + \frac{2}{t} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^3 - 3t + 2}{t} = 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2(t+2)}{t} = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(t+2) = 0 \Rightarrow t_1 = 1 > 0; t_2 = -2 < 0$$
1p

Revenind la notație, vom avea : $e^{(x^2+x+a)} = 1 \Rightarrow x^2 + x + a = 0 (*)$.

Ecuția are soluții reale $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4a \geq 0 \Leftrightarrow a \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$1p

a) Ecuția $f(x) = 0$ are toate soluțiile strict negative $\Leftrightarrow$ ecuația (*) are soluțiile x_1, x_2 strict negative.....1p

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \text{ unde } S = x_1 + x_2 = -1; P = x_1 \cdot x_2 = a \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow$$
1p

$$\begin{cases} a \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \\ -1 < 0 \text{ adevărat} \Leftrightarrow a \in \left(0, \frac{1}{4}\right] \\ a \in (0, \infty) \end{cases}$$
1p

2. 1) $\Rightarrow$ 2) $A+B+B^2+\dots+B^{k-1}=O_n \mid \cdot B \Rightarrow AB+B^2+\dots+B^{k-1}+B^k=O_n \xRightarrow{AB=A+B} \underbrace{A+B+B^2+\dots+B^{k-1}}_{O_n} + B^k = O_n \Rightarrow B^k = O_n$ 3p

2) $\Rightarrow$ 1) Știm că $B^k = O_n, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Demonstrăm prin metoda inducției matematice afirmația de la (1)1p

$$P(k): A+B+B^2+\dots+B^{k-1}=O_n, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$$

I) $P(2): A+B=O_n$ de verificat

$$O_n = B^2 = AB^2 = (AB)B \stackrel{AB=A+B}{=} (A+B)B = AB+B^2 \stackrel{B^2=O_n}{=} AB = A+B \Rightarrow A+B=O_n \Rightarrow P(2) \text{ adevărat.}$$
1p

$$II) P(k) \rightarrow P(k+1)$$

$$P(k): A + B + B^2 + \dots + B^{k-1} = O_n, \text{ pentru } k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \text{ fixat, ipoteză de inducție}$$

$$P(k+1): A + B + B^2 + \dots + B^{k-1} + B^k = O_n, \text{ trebuie demonstrat}$$

$$\text{Din } P(k) \Rightarrow A + B + \dots + B^{k-1} = O_n \mid + B^k (= O_n) \Rightarrow A + B + B^2 + \dots + B^{k-1} + B^k = O_n \Rightarrow P(k+1): A + B + B^2 + \dots + B^{k-1} + B^k = O_n \text{ adevărat.} \quad \dots\dots 2p$$

$$3. \sum_{k=1}^n \frac{k^2 - k + 1}{k^4 + k} = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 - k + 1}{(k^4 + k)} = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 - k + 1}{k(k^3 + 1)} = \sum_{k=1}^n \frac{\cancel{k^2 - k + 1}}{k(k+1)(\cancel{k^2 - k + 1})} = \quad \dots\dots 2p$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \quad \dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\sum_{k=1}^n \frac{k^2 - k + 1}{k^4 + k}} \right)^{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \right)^{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{n^2+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{-1}} \right]^{\frac{-(n^2+1)}{n(n+1)}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad \dots\dots 3p$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} x^a (\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^a (\sqrt{x+1} - \sqrt{x} - \sqrt{x} + \sqrt{x-1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^a \left(\frac{\cancel{\sqrt{x+1}} - \cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} + \frac{\cancel{\sqrt{x-1}} - \cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} \right) = \quad \dots\dots 2p$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x^a \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} + \frac{-1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^a \left(\frac{\sqrt{x-1} + \cancel{\sqrt{x}} - \sqrt{x+1} - \cancel{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})} \right) = \quad \dots\dots 1p$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x^a \left(\frac{\cancel{\sqrt{x-1}} - 1 - \cancel{\sqrt{x}} - 1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})} \right) = \quad \dots\dots 1p$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^a}{x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right) \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 \right) \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right)} \stackrel{not}{=} l \quad \dots\dots 2p$$

Discuție:

$$1) \text{ Pentru } a < \frac{3}{2} \Rightarrow l = 0 \quad 2) \text{ Pentru } a = \frac{3}{2} \Rightarrow l = -\frac{1}{4} \quad 3) \text{ Pentru } a > \frac{3}{2} \Rightarrow l = -\infty \quad \dots\dots 1p$$

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 15.02.2014

Clasa a XI-a M₂

Soluții și bareme

1. $D = \mathbb{R} \Rightarrow$ nu există asimptote verticale. Cum $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty \Rightarrow$ nu există asimptote orizontale.2p

Studiem existența asimptotei oblice la $-\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{x} = -1, \quad \text{.....1p}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\underbrace{\sqrt{x^2 + 2}}_{\infty} + \underbrace{x}_{-\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} + 2 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + 2} - x} = \frac{2}{\infty} = 0, \quad \text{.....1p}$$

deci $y = -x$ asimptotă oblică la $-\infty$0,5p

Studiem existența asimptotei oblice la $+\infty$:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{x} = 1, \quad \text{.....1p}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\underbrace{\sqrt{x^2 + 2}}_{\infty} - \underbrace{x}_{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2} + 2 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \frac{2}{\infty} = 0, \quad \text{.....1p}$$

deci $y = x$ asimptotă oblică la $+\infty$0,5p

$$2. \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x \\ 2 & x & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + L_2 + L_3} \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3 \\ 1 & 2 & x \\ 2 & x & 1 \end{vmatrix} = (x+3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 2 & x & 1 \end{vmatrix} = (x+3) \cdot (2+x+2x-4-x^2-1) = (x+3) \cdot (-x^2+3x-3) \quad \text{.....4p}$$

Cum determinantul este nul $\Leftrightarrow (x+3) \cdot (-x^2+3x-3) = 0$, adică $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ 1p

sau $-x^2+3x-3=0$, dar $\Delta = -3 < 0$ și ecuația nu are soluții reale. Deci $S = \{-3\}$2p

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{\operatorname{tg}(x^3 - 1)} \cdot \frac{e^{x^2 - 1}}{x^4 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{\frac{\sin(x^2 - 1)}{x^2 - 1}}^{\nearrow 1} \cdot \cancel{(x-1)}(x+1)}{\underbrace{\frac{\operatorname{tg}(x^3 - 1)}{x^3 - 1}}_{\searrow 1} \cdot \cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)} \cdot \frac{\overbrace{\frac{e^{x^2 - 1} - 1}{x^2 - 1}}^{\nearrow 1} \cdot \cancel{(x^2 - 1)}}{\cancel{(x^2 - 1)}(x^2 + 1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}. \quad \text{.....7p}$$

$$4. a) \det(A + 3I_3) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 48 + 3 = 51. \quad \text{.....2p}$$

$$b) A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, A^5 = A^3 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ și} \quad \text{.....1p}$$

$$A^5 + 4A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3. \quad \text{.....1p}$$

$$c) \text{ Din (b) } \Rightarrow A^5 + 4A = O_3 \Rightarrow A^5 = -4A, A^9 = A^5 \cdot A^4 = -4A^5 = (-4)^2 A, A^{13} = A^9 \cdot A^4 = (-4)^2 A^5 = (-4)^3 A, \dots, A^{2013} = (-4)^{503} A \Rightarrow \quad \text{.....1p}$$

$$A + A^5 + A^9 + \dots + A^{2013} = A + (-4)A + (-4)^2 A + \dots + (-4)^{503} A = \left[1 + (-4) + (-4)^2 + \dots + (-4)^{503} \right] A = \quad \text{.....1p}$$

$$= \frac{(-4)^{504} - 1}{-4 - 1} A = \frac{1 - 4^{504}}{5} A. \quad \text{.....1p}$$

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală -15.02.2014

Clasa a XII-a M₁

Soluții și bareme

1. Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive pe $\mathbb{R}$. Utilizăm formula de integrare prin părți. ...1p

$$\text{Cum } \left[\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \right]' = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{|x|(1+x^2)}, (\forall) x \in \mathbb{R}^*, \quad \dots 1p$$

$$\text{obținem: } \int \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) dx = \int (x)' \cdot \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) dx = x \cdot \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - \int \frac{2|x|}{1+x^2} dx, \quad \dots 2p$$

Dacă F este o primitivă a lui f , atunci $(\exists) c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$F(x) = \begin{cases} x \cdot \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \ln(1+x^2) + c_1, & x < 0 \\ c_2, & x = 0 \\ x \cdot \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - \ln(1+x^2) + c_3, & x > 0 \end{cases} \quad \dots 1p$$

Cum F este continuă, din condiția $F(0-0) = F(0+0) = F(0)$, obținem $c_1 = c_2 = c_3$, ...1p

$$\Rightarrow F(x) = c + \begin{cases} x \cdot \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \ln(1+x^2), & x \leq 0 \\ x \cdot \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - \ln(1+x^2) + c_3, & x > 0 \end{cases}, \text{ unde } c \in \mathbb{R}. \quad \dots 1p$$

2. a) Utilizăm formula de integrare prin părți, avem:

$$\int \cos(x^3 + 1) dx = \int (x^3)' \cos(x^3 + 1) dx = x^3 \cos(x^3 + 1) + 3 \int x^2 \sin(x^3 + 1) dx. \quad \dots 3p$$

- b) Utilizând formula de integrare prin părți, obținem:

$$I = \int 4 \cos(x^3 + 1) dx = \int (4x)' \cos(x^3 + 1) dx = 4x \cos(x^3 + 1) + 12 \int x^3 \sin(x^3 + 1) dx = \dots\dots\dots 1p$$

$$= 4x \cos(x^3 + 1) + 12 \int \left(\frac{x^4}{4}\right)' \sin(x^3 + 1) dx = 4x \cos(x^3 + 1) + 12 \frac{x^4}{4} \sin(x^3 + 1) - 12 \int \frac{x^4}{4} \cdot 3x^2 \cos(x^3 + 1) dx = \dots\dots\dots 1p$$

$$= 4x \cos(x^3 + 1) + 3x^4 \sin(x^3 + 1) - \underbrace{\int 9x^6 \cos(x^3 + 1) dx}_J, \Rightarrow \dots\dots\dots 1p$$

$$\int (4 + 9x^6) \cos(x^3 + 1) dx = I + J = 4x \cos(x^3 + 1) + 3x^4 \sin(x^3 + 1) + C. \dots\dots\dots 1p$$

$$3. x * y = xy - 2x - 2y + 6 = xy - 2x - 2y + 4 + 2 = x(y - 2) - 2(y - 2) + 2 = (x - 2)(y - 2) + 2, (\forall) x, y \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 1p$$

$$x * x = (x - 2)^2 + 2, x * x * x = (x * x) * x = (x - 2)^3 + 2, \dots, \underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x - 2)^n + 2, (\forall) x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \dots\dots\dots 1p$$

Demonstrăm prin inducție : Fie $x \in \mathbb{Z}, P(n): \underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x - 2)^n + 2, n \in \mathbb{N}, n \geq 2. P(2)$ este adevărat.1p

Presupunem $P(k)$ adevărat și demonstrăm $P(k + 1)$, unde $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ arbitrar fixat.

$$P(k + 1): \underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } k+1 \text{ ori}} = \underbrace{(x * x * \dots * x) * x}_{\text{de } k \text{ ori}} = \left[(x - 2)^k + 2 - 2 \right] (x - 2) + 2 = (x - 2)^{k+1} + 2, \text{ deci } P(k + 1) \text{ adevărat.}$$

Așadar $P(n)$ adevărat $(\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \dots\dots\dots 2p$

$$\text{Avem } \underbrace{5 * 5 * \dots * 5}_{\text{de } 2014 \text{ ori}} = (5 - 2)^{2014} + 2 = 3^{2014} + 2 \text{ și restul împărțirii la } 3^{2014} \text{ este } 2. \dots\dots\dots 2p$$

$$4. a) A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 5x^2 - 2x \\ 0 & 1 & 5x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2y & 5y^2 - 2y \\ 0 & 1 & 5y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2y + 2x & 5y^2 - 2y + 10xy + 5x^2 - 2x \\ 0 & 1 & 5y + 5x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2(x + y) & 5(x + y)^2 - 2(x + y) \\ 0 & 1 & 5(x + y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{x+y}, (\forall) x, y \in \mathbb{R}. \dots\dots\dots 2p$$

b) Din a) $A_x \cdot A_y = A_{x+y}, x + y \in \mathbb{R}$, deci $A_x \cdot A_y \in G, (\forall) A_x, A_y \in G$, deci înmulțirea este lege pe G (1)0,5p

Observăm că $A_x = A_y \Leftrightarrow x = y$. Înmulțirea matricelor este asociativă pe $M_3(\mathbb{R}), G \subset M_3(\mathbb{R})$, deci și pe G (2)0,5p

$A_0 = I_3 \in G$, deci înmulțirea admite element neutru (3).0,5p

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $A_x \cdot A_{-x} = A_{-x} \cdot A_x = A_0 = I_3$, deci toate elementele sunt simetrizabile (4).0,5p

Din (1),(2),(3),(4) rezultă $(G, \cdot)$ grup.0,5p

c) $f(A_x \cdot A_y) = f(A_{x+y}) = x + y = f(A_x) + f(A_y), (\forall) A_x, A_y \in G$, deci f morfism (A)1p

Fie $A_x, A_y \in G$ astfel încât $f(A_x) = f(A_y) \Rightarrow x = y \Rightarrow A_x = A_y \Rightarrow f$ injectivă (B_1)0,5p

Fie $y \in \mathbb{R}$, atunci $(\exists) A_y \in G$ astfel încât $f(A_y) = y$, deci f surjectivă (B_2)0,5p

Din (B_1) și (B_2) rezultă f bijectivă (B) . Din (A) și (B) rezultă f izomorfism.0,5p

Olimpiada Națională de Matematică

Etapă locală - 15.02.2014

Clasa a XII-a M₂

Soluții și bareme

1. a) $2(x-3)(y-3)+3=2(x^2-3x-3y+9)+3=2xy-6x-6y+21=x*y, (\forall) x, y \in \mathbb{R}.$ 2p

b) Căutăm “zeroul” legii: $a \in \mathbb{R}$ pentru care $a*x = x*a = a, (\forall) x \in \mathbb{R}.$

$$a*x=a \Leftrightarrow 2(a-3)(x-3)+3=a \Leftrightarrow 2(a-3)(x-3)-(a-3)=0 \Leftrightarrow (a-3)[2(x-3)-1]=0, (\forall) x \in \mathbb{R}, \text{ deci } a-3=0 \Rightarrow a=3, \dots\dots 2p$$

$$\text{verificăm } x*3=2(x-3)(3-3)+3=3, (\forall) x \in \mathbb{R}, \text{ deci } 3*x=x*3=3, (\forall) x \in \mathbb{R}. \dots\dots 1p$$

$$\text{Avem } 1*2*\dots*2014 \stackrel{"" \text{ asociativă}}{=} (1*2)*3*(4*\dots*2014)=3*(4*\dots*2014)=3. \dots\dots 1p$$

c) Răspunsul este afirmativ. Putem lua, spre exemplu, $a=3+\sqrt{3}, b=3+2\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$

$$\text{obținem } a*b=2(3+\sqrt{3}-3)(3+2\sqrt{3}-3)+3=15 \in \mathbb{N}. \dots\dots 1p$$

2. Avem $I+J=\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int dx = x+C$, respectiv2p

$$-I+J=\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} dx = \ln|\sin x + \cos x| + C \stackrel{x \in (0, \frac{\pi}{2})}{=} \ln(\sin x + \cos x) + C \dots\dots 2p$$

$$I=\frac{1}{2}[(I+J)-(-I+J)]=\frac{1}{2}[x-\ln(\sin x + \cos x)]+C, \text{ iar} \dots\dots 1,5p$$

$$J=\frac{1}{2}[(I+J)+(-I+J)]=\frac{1}{2}[x+\ln(\sin x + \cos x)]+C \dots\dots 1,5p$$

3. F este primitivă pentru $f \Leftrightarrow F'(x)=f(x), (\forall) x \in (1, \infty) \Leftrightarrow [(ax+b)\sqrt{x-1}]'=\sqrt{x-1}, (\forall) x \in (1, \infty) \Leftrightarrow \dots\dots 2p$

$$a\sqrt{x-1}+(ax+b) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 2a(x-1)+(ax+b)=2(x-1) \Leftrightarrow 3ax+(b-2a)=2x-2, (\forall) x \in (1, \infty) \Rightarrow \dots\dots 3p$$

$$\begin{cases} 3a=2 \\ b-2a=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=-\frac{2}{3} \end{cases}. \dots\dots 2p$$

4. a) $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$ și cum $x+y \in \mathbb{Z}$, rezultă $A(x) \cdot A(y) \in G$, deci

înmulțirea este lege pe G (1).1p

Înmulțirea matricelor este asociativă pe $M_2(\mathbb{R})$, $G \subset M_2(\mathbb{R})$, deci și pe G (2).1p

$A(0) = I_2 \in G$, deci înmulțirea admite element neutru (3).1p

$(\forall) x \in \mathbb{Z}$, avem $A(x) \cdot A(-x) = A(-x) \cdot A(x) = A(0) = I_2$, deci toate elementele sunt simetrizabile (4).1p

Din (1), (2), (3), (4) rezultă $(G, \cdot)$ grup.

b) $f(x+y) = A(x+y) \stackrel{a)}{=} A(x) \cdot A(y) = f(x) \cdot f(y)$, $(\forall) x, y \in \mathbb{Z}$, deci f morfism (A)1p

Fie $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(x) = f(y) \Rightarrow A(x) = A(y) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y \Rightarrow f$ injectivă (B_1)1p

Fie $A(x) \in G$, atunci $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(x) = A(x)$, deci f surjectivă (B_2)1p

Din (B_1) și (B_2) rezultă f bijectivă (B) . Din (A) și (B) rezultă f izomorfism.