

Barem de corectare OLM Clasa a XII-a, 2014

1. a) Deoarece f derivabilă, deci continuă, și $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0 \Rightarrow f$ strict descrescătoare pe

$(1, +\infty) \Rightarrow \text{Im } f = [f(4), f(2)] = [-1, 1] \dots\dots\dots(1p)$

$f(x \circ y) = f(x)f(y) \quad \forall x, y \in A \dots\dots\dots(1p)$

b) f strict monotonă pe $A \Rightarrow f$ injectivă pe $A \dots\dots\dots(1p)$

Se arată că $f((x \circ y) \circ z) = f(x \circ (y \circ z))$ și cum f injectivă $\Rightarrow$ legea “ $\circ$ ” asociativă.....(1p)

Se rezolvă ecuația $f(x \circ e) = f(x) \Rightarrow f(e) = 1 \Rightarrow e = 2 \in A$ elementul neutru..... (1p)

Pentru a determina elementele simetrizabile rezolvăm ecuația $f(x \circ x') = f(e)$.

Pentru $x \neq \frac{5}{2} \Rightarrow f(x) \neq 0$ și $f(x') = \frac{1}{f(x)} \in [-1, 1] \Rightarrow x \in \{2, 4\}$ care sunt singurele elemente

simetrizabile.....(1p)

$f\left(\prod_{k=1}^n \frac{6k+5}{3k+2}\right) = \prod_{k=1}^n f\left(\frac{6k+5}{3k+2}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1} = f\left(\frac{5n+6}{2n+3}\right)$ și atunci

$\frac{11}{5} \circ \frac{17}{8} \circ \frac{23}{11} \circ \dots \circ \frac{6n+5}{3n+2} = \frac{5n+6}{2n+3} \dots\dots\dots(1p)$

2. a) Funcția $(f' + fg')e^g$ admite primitive fiind continuă.....(1p)

$\int [f'(x) + f(x)g'(x)] \cdot e^{g(x)} dx = \int [f(x)e^{g(x)}]' dx = f(x)e^{g(x)} + C \dots\dots\dots(3p)$

b) Pentru $f(x) = \ln x$ și $g(x) = x + \frac{1}{x}$ se aplică a)(2p)

Obținem $\int \frac{x^2 \ln x - \ln x + x}{x^2} e^{x+\frac{1}{x}} dx = \ln x \cdot e^{x+\frac{1}{x}} + C \dots\dots\dots(1p)$

3. a) Din tabla legii

.	1	ε	ε^2
1	1	ε	ε^2
ε	ε	ε^2	1
ε^2	ε^2	1	ε

rezultă că $\forall x, y \in H \Rightarrow x \cdot y \in H$ și că $\forall x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$ adică H subgrup.....(3p)

b) Fie $H' = \{1, a, b\}$ subgrup cu 3 elemente al grupului $(C^*, \cdot)$

Dacă $a^2 = 1$, atunci $a = 1$ (fals) sau $a = -1$

Dacă $a = -1$ atunci $b^2 = 1$ sau $b^2 = -1 \dots\dots\dots(1p)$

Dacă $b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$ și $H' = \{-1, 1\}$ fals și dacă $b^2 = -1$ atunci $H' = \{\pm 1, \pm i\}$ fals.....(1p)

Prin urmare $a^2 \neq 1$. Însă $a^2 \neq a$, căci din $a^2 = a$ ar rezulta $a = 1$, fals.....(1p)

Rămâne că $b = a^2$ și $a^3 = 1, a \neq 1$ adică $a = \varepsilon$ sau $a = \varepsilon^2$. În ambele cazuri, $H' = H \dots\dots\dots(1p)$

4. a) Considerăm şirul $J_n = \int_0^a \sin^n x \sin nx \, dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$

Prin părţi obţinem $I_n = \frac{1}{n} \sin^n a \sin na - \int_0^a \sin^{n-1} x \cos x \sin nx \, dx \quad (1) \dots\dots\dots (1p)$

Adunând încă odată I_n la (1) obţinem $2I_n = \frac{1}{n} \sin^n a \sin na - J_{n-1} \quad (2) \dots\dots\dots (1p)$

Analog, $J_n = -\frac{1}{n} \sin^n a \cos na + \int_0^a \sin^{n-1} x \cos x \cos nx \, dx \Rightarrow 2J_n = -\frac{1}{n} \sin^n a \cos na + I_{n-1} \quad (3) (1p)$

Din (2) şi (3) obţinem $4I_n = \frac{2}{n} \sin^n a \sin na + \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} a \cos(n-1)a - I_{n-2} \quad (4) \dots\dots\dots (1p)$

b) Deoarece $\sin a \in (-1,1) \Rightarrow \sin^n a \rightarrow 0 \dots\dots\dots (1p)$

Din (4): $\lim_{n \rightarrow \infty} n(2^{\alpha+2} I_{n+1} + 2^\alpha I_{n-1}) = 2^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+1} \sin^{n+1} a \sin(n+1)a + \sin^n a \cos na \right) = 0 \dots\dots\dots (2p)$