

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 25.02.2023–
CLASA A XII-A
Subiecte

1. Fie $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pentru orice $t \in \mathbb{R}$ definim $f_t : E \rightarrow E$, $f_t(x, y) = \left(x + ty + \frac{t^2}{2}, y + t \right)$,

$\forall (x, y) \in E$. Pe mulțimea $G = \{ f_t / t \in \mathbb{R} \}$ definim $(f_t, f_v) \rightarrow f_t \circ f_v$. Arătați că:

a) $(G, \circ)$ este grup comutativ ;

b) $(G, \circ)$ este izomorf cu grupul comutativ $(\mathbb{R}, +)$.

2. Fie $F = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ continuă și } \int_{-a}^a f(x) dx = 0, \text{ oricare ar fi } a \in \mathbb{R} \right\}$

a) Arătați că , dacă $f \in F$, atunci $f(0) = 0$;

b) Arătați că $\int_{-2023}^{2023} f(x) \ln(x^2 + 1) dx = \int_{-2023}^{2023} f(x) (e^x + e^{-x}) dx$.

Prof. Octavian Purcaru, Ploiești

3. Demonstrați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(e^{2x} + 5) \sin x}{e^{2x} \cos x + 2 \sin x + \cos x} dx = \pi$.

Prof. Claudiu Militaru , Ploiești

4. Dacă $(G, \cdot)$ este un grup cu elementul neutru e și dacă $a, b \in G$ satisfac condițiile:

$b^6 = e$, $ab = b^4 a$, arătați că $b^3 = e$ și $ab = ba$.

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.