# OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
## ETAPA LOCALĂ
## SUCEAVA
## 22 februarie 2014

## CLASA a XII-a

**1.** a) **(3p)** Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $(G,\cdot)$ un grup cu $3n+1$ elemente. Să se demonstreze că pentru orice $a \in G$, există un unic $x \in G$ astfel încât $x^3 = a^2$.

b) **(4p)** Fie $n$ un număr natural, $n \geq 2$ și $(G,\cdot)$ un grup cu $n^2 - n - 1$ elemente. Știind că funcția $f : G \to G$, $f(x) = x^n$ este endomorfism al grupului, să se demonstreze că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

**2.** Fie $x \in \mathbb{Z}_{2014}$ astfel încât $x^{2014} = \hat{1}$. Arătați că $x^2 = \hat{1}$.

**3.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție care admite o primitivă neinjectivă. Să se arate că pentru orice $\lambda > 0$, există $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 \neq c_2$ astfel încât $f(c_1) + \lambda f(c_2) = 0$.

**4.** Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă cu $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Dacă $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă cu derivata integrabilă, demonstraţi că are loc inegalitatea:

$$2\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx \cdot \int_0^1 |g'(x)|\,dx.$$

**Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.**
**2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.**
**3. Timp de lucru 3 ore.**