



Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA A IX A

Problema 1. Să se rezolve ecuațiile:

- a) $|x^2 - 3x + 2| = \left| x - \frac{1}{3} \right| - \frac{2}{3}, \quad x \in \mathbf{R};$
 b) $\left[\frac{n-1}{2} \right] + \left[\frac{n^2-n}{3} \right] = n, n \in \mathbb{Z},$ unde $[x]$ este partea întreagă a numărului x .

Soluție și barem

a) Prelucrând ecuația se obține:

$$1. \quad x^2 - 3x + \frac{8}{3} - \left| x - \frac{1}{3} \right| = 0 \quad \text{sau} \quad 2. \quad x^2 - 3x + \frac{4}{3} + \left| x - \frac{1}{3} \right| = 0 \quad \dots\dots\dots 1p$$

Dacă $x < \frac{1}{3}$ atunci, din 1. rezultă ecuația $3x^2 - 6x + 7 = 0$ care nu are soluții reale, iar din 2. Rezultă ecuația $3x^2 - 12x + 5 = 0$ cu soluțiile $x_1 = \frac{6 + \sqrt{21}}{3}$ și $x_2 = \frac{6 - \sqrt{21}}{3}$ ambele mai mari decât $\frac{1}{3}$ 1p

Dacă $x > \frac{1}{3}$ atunci, din 1. rezultă ecuația $x^2 - 4x + 3 = 0$ cu soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = 3$, iar din 2. Rezultă ecuația $x^2 - 2x + 1 = 0$ cu soluțiile $x_1 = x_2 = 1 > \frac{1}{3}$..

Așadar, mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{1, 3\}$ 1p

b)

$$\left[\frac{n-1}{2} \right] = k \Leftrightarrow k \leq \frac{n-1}{2} < k+1 \Rightarrow 2k \leq n-1 < 2k+2 \Rightarrow 2k+1 \leq n < 2k+3 \Rightarrow n \in \{2k+1, 2k+2\} \dots\dots\dots 1p$$

Dacă $n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$:

$$k + \left[\frac{n^2-n}{3} \right] = 2k+1 \Leftrightarrow \left[\frac{(2k+1)^2 - (2k+1)}{3} \right] = k+1 \Leftrightarrow \left[\frac{(2k+1)(2k)}{3} \right] = k+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k+1 \leq \frac{2k(2k+1)}{3} < k+2 \Leftrightarrow 3k+3 \leq 4k^2+2k < 3k+6 \mid -(3k+3)$$

$0 \leq 4k^2 - k - 3 < 3, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4k^2 - k - 3 \in \mathbb{Z}$. Analizăm situațiile:

$$4k^2 - k - 3 = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{1-7}{8} \notin \mathbb{Z}, k_2 = \frac{1+7}{8} = 1 \in \mathbb{Z}$$



$$4k^2 - k - 3 = 1 \Rightarrow 4k^2 - k - 4 = 0, \Delta = 65 \neq \text{pp}$$

$$4k^2 - k - 3 = 2 \Rightarrow k_1 = \frac{1-9}{8} = -1, k_2 = \frac{1+9}{8} \notin \mathbb{Z}$$

$$k \in \{-1, 1\} \Rightarrow n \in \{-1, 3\} \dots\dots\dots 2p$$

Dacă $n = 2k + 2, k \in \mathbb{Z}$:

$$k + \left[\frac{n(n-1)}{3} \right] = 2k + 2 \Leftrightarrow \left[\frac{(2k+2)(2k+1)}{3} \right] = k + 2 \Leftrightarrow k + 2 \leq \frac{4k^2 + 6k + 2}{3} < k + 3 \Leftrightarrow$$

$$3k + 6 \leq 4k^2 + 6k + 2 < 3k + 9 \mid -3k - 6 \Leftrightarrow 0 \leq 4k^2 + 3k - 4 < 3. \text{ Analizăm situațiile:}$$

$$4k^2 + 3k - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 73 \neq \text{pp}$$

$$4k^2 + 3k - 4 = 1 \Rightarrow \Delta = 89 \neq \text{pp}$$

$$4k^2 + 3k - 4 = 2 \Rightarrow \Delta = 105 \neq \text{pp}. \text{ Nu avem soluții în acest caz.} \dots\dots\dots 1p$$

Problema 2. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n, a > 0$ cu $\sum_{i=1}^n x_i = a$. Dacă $x_1 = x_{n-1}$, arătați că:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^3}{x_i^2 + x_{i+1}^2} \geq \frac{a}{2}$$

Soluție și barem

Avem

$$\frac{x_i^2 + x_{i+1}^2}{2} \geq x_i x_{i+1} \Leftrightarrow \frac{x_i x_{i+1}}{x_i^2 + x_{i+1}^2} \leq \frac{1}{2} \dots\dots\dots 2p.$$

$$\Rightarrow \frac{x_i^3}{x_i^2 + x_{i+1}^2} = x_i - x_{i+1} \frac{x_i x_{i+1}}{x_i^2 + x_{i+1}^2} \geq x_i - \frac{x_{i+1}}{2} \dots\dots\dots 2p$$

Adunând relațiile pentru $i = 1, 2, \dots, n$ obținem

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^3}{x_i^2 + x_{i+1}^2} \geq \sum_{i=1}^n x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{2} = \frac{a}{2} \dots\dots\dots 3p.$$

Problema 3. Fie $\triangle ABC$ cu G și I centrul de greutate, respectiv centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, iar M un punct în planul triunghiului. Să se demonstreze:

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 \cdot \overrightarrow{MG}$

b) $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c) \cdot \overrightarrow{MI}$, cu notațiile $a = BC, b = AC, c = AB$.



c) Dacă $\vec{v} = a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC}$ și $\vec{u} = \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}$, să se arate că vectorii $\vec{v}$ și $\vec{u}$ sunt coliniari și

$$3 \cdot |\vec{v}| = (a+b+c) \cdot |\vec{u}|$$

Soluție și barem

a) Fie D mijlocul lui $(BC) \Rightarrow \vec{MD} = \frac{\vec{MB} + \vec{MC}}{2}$. Dacă G este centrul de greutate $\Rightarrow \frac{\vec{GA}}{\vec{GD}} = -2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{MG} = \frac{1}{1+2} \vec{MA} + \frac{2}{1+2} \vec{MD} = \frac{1}{3} \vec{MA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (\vec{MB} + \vec{MC}) = \frac{1}{3} (\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}) \dots\dots\dots 2p$$

b) Fie $[AE]$ și $[BF]$ bisectoarele unghiurilor $\hat{A}$ și $\hat{B}$, $E \in (BC)$, $F \in (AC)$.

Din teorema bisectoarei $\Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{BA}{AC} = \frac{c}{b}$ și $\Rightarrow \frac{\vec{EB}}{\vec{EC}} = -\frac{c}{b}$;

$$I \in (AE), (BI \text{ bisectoarea unghiului } \hat{B}) \Rightarrow \frac{\vec{IA}}{\vec{IE}} = -\frac{c(b+c)}{ac} = -\frac{b+c}{a}$$

$$\vec{ME} = \frac{1}{1+\frac{c}{b}} \vec{MB} + \frac{\frac{c}{b}}{1+\frac{c}{b}} \vec{MC} = \frac{b\vec{MB} + c\vec{MC}}{b+c}$$

$$\vec{MI} = \frac{1}{1+\frac{b+c}{a}} \vec{MA} + \frac{\frac{b+c}{a}}{1+\frac{b+c}{a}} \vec{ME} = \frac{a\vec{MA}}{a+b+c} + \frac{b+c}{a+b+c} \cdot \frac{b\vec{MB} + c\vec{MC}}{b+c} = \frac{a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC}}{a+b+c} \dots\dots\dots 2p$$

c) Dacă în b) considerăm $M = G$ atunci $\vec{v} = a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = (a+b+c) \cdot \vec{GI}$

Dacă în a) considerăm $M = I$ atunci $\vec{u} = \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = 3 \cdot \vec{IG}$.

Observăm că $\vec{GI} = -\frac{1}{3} \vec{u} \Rightarrow \vec{v} = (a+b+c) \cdot \left(-\frac{1}{3} \vec{u}\right) = -\frac{a+b+c}{3} \vec{u} \Rightarrow$ vectorii $\vec{v}$ și $\vec{u}$ sunt coliniari.

$$|\vec{v}| = \left| \frac{a+b+c}{3} \right| \cdot |\vec{u}| \Leftrightarrow 3|\vec{v}| = (a+b+c) \cdot |\vec{u}| \dots\dots\dots 3p$$

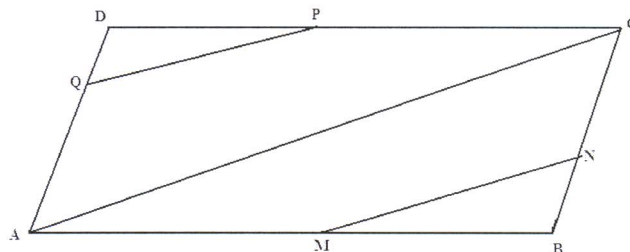
Problema 4. Pe laturile $[AB], [BC], [CD], [DA]$ ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N, P și respectiv Q .

a) Arătați că $\vec{MN} + \vec{QP}$ este coliniar cu $\vec{AC} \Leftrightarrow \vec{NP} + \vec{MQ}$ este coliniar cu $\vec{BD}$.

b) Indicați 4 puncte M, N, P, Q pentru care echivalența de la punctul a) are loc.



Soluție și barem



$$\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{BC} = \vec{v}, \frac{AM}{AB} = a, \frac{BN}{BC} = b, \frac{CP}{CD} = c, \frac{DQ}{DA} = d$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) + \overrightarrow{BN} = (\vec{u} - a \cdot \vec{u}) + b \cdot \vec{v} = (1-a) \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$$

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP} = +d\vec{v} + (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{PC}) = +d\vec{v} + (\vec{u} - \vec{uc}) = (1-c) \cdot \vec{u} + d \cdot \vec{v}$$

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \vec{u}(2-a-c) + \vec{v}(b+d) \dots\dots\dots 2p$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v} \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{2-a-c}{1} = \frac{b+d}{1} \Rightarrow 2 = a+b+c+d \dots\dots\dots 1p$$

Analog, $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$ coliniar cu $\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow 2 = a+b+c+d$

a) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP}$ coliniar cu $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow a+b+c+d = 2 \Leftrightarrow \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$ coliniar cu $\overrightarrow{BD} \dots\dots\dots 2p$

b) Putem considera mijloacele laturilor $[AB], [BC], [CD], [DA]$. $\dots\dots\dots 1p$

Notă: Orice altă soluție corectă sau demers de rezolvare corect se va puncta corespunzător.