



Olimpiada Națională de Matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a V-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și numerele x, y și z , date prin :
$$x = \{1^2 + 2^3 \cdot [3^4 - 3 \cdot (2^5 - 5)]\} \cdot 2^n$$
$$y = [(1 + 2 + 3 + \dots + 10) : 11 - 2]^{n-1}$$
$$z = [(1 + 2^2 : 4) - (3^2 - 2^3)]^3 \cdot (1002 : 3 - 331)$$
 - a) Comparați în funcție de numărul n numerele x, y, z . Discuție.
 - b) Determinați ultima cifră a numărului $t = x \cdot y \cdot z$
2. Împărțind numărul natural x la numărul natural y , obținem câtul 2 și restul 41.
 - a) Arătați că $3x - 6y + 2$ este cubul unui număr natural.
 - b) Aflați numerele x și y , știind că $x + y < 167$.
3. Un elev scrie pe o foaie toate numerele naturale în ordine, începând cu 1 și terminând cu $\overline{300p}$. Știind că $(p - 1)^{2017} = 2017^0$, aflați câte cifre are numărul scris de elev.
4. a) Completați căsuțele cu semne $<, >, =$, dând și justificări:
$$3^{16} \square 3 \cdot 32^5 \square 3 \cdot 2^{25} \square 4 \cdot 2^{25} \square 2^{27}$$
 - b) Comparați numerele: $a = 8^9$ cu $b = 9^8$

Notă:

- Timpul de lucru este de 2 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.

SUCCES!



Olimpiada Națională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a VI-a

1. a) Arătați că numărul $A = 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2017}$ este divizibil cu 133.
b) Determinați numerele naturale x , $2000 < x < 3000$, care împărțite la 6, 7 și 11 dau resturile 3, 1, respectiv 4.
2. a) Determinați numerele de forma $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\frac{99}{\overline{abc} - a - b - c} \in \mathbb{N}$.
b) Să se determine numerele prime a și b care satisfac relația:
 $62a^2 + 93a + b = 2017$
3. Se dau punctele coliniare A, B, C și D în această ordine, astfel încât:
 $4 \cdot AB + 5 \cdot AD = 9 \cdot AC$ și $BD = 18$ cm. Să se afle lungimea segmentelor BC și CD .
4. Se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ două unghiuri adiacente suplementare astfel încât $m(\sphericalangle BOC) = 2m(\sphericalangle AOB) + 30^\circ$. Fie semidreptele $[OM$ și $[ON$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ respectiv $\sphericalangle BOC$, semidreapta $[OF$ opusă semidreptei $[OB$ și un punct P situat în același semiplan cu F astfel încât $m(\sphericalangle MOP) = 90^\circ$
 - a. Arătați că punctele N, O, P sunt coliniare
 - b. Arătați că unghiurile $\sphericalangle POC$ și $\sphericalangle POF$ sunt suplementare.

Notă:

- Timpul de lucru este de 2 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.

SUCCES!



Olimpiada Națională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a VII-a

1. Dacă $y = \frac{3}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{5}{(2 \cdot 3)^2} + \dots + \frac{2017}{(1008 \cdot 1009)^2}$ rezolvați ecuația $x^2 = \frac{1}{1-y}$.
2. a) Determinați $x \in \mathbb{N}$ știind că:
$$\sqrt{1 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + \dots + 4 \cdot 5^{262} + 4 \cdot 5^{263}} = 25^{3x}.$$

b) Arătați că: $\frac{\sqrt{1 \cdot 2}}{3} + \frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{5} + \frac{\sqrt{3 \cdot 4}}{7} + \frac{\sqrt{4 \cdot 5}}{9} + \frac{\sqrt{5 \cdot 6}}{11} < \frac{5}{2}.$
3. Fie ABCD un romb cu $m(\angle BAD) = 20^\circ$. Construim pe laturile (AD) spre exteriorul rombului $\triangle ADF$ echilateral, respectiv pe latura (CD) spre interiorul rombului $\triangle CDE$ echilateral. Demonstrați că punctele E, B și F sunt coliniare și determinați $m(\angle DBE)$.
4. În trapezul ABCD oarecare, $AB \parallel CD$, AB baza mare. Fie (AM) bisectoarea unghiului $\widehat{CAB}$, $M \in [BC]$, astfel încât $[BM] \equiv [MC]$ și $DM \cap AB = \{E\}$.
a) Să se arate că DBEC este paralelogram.
b) Dacă $AM \cap CE = \{N\}$ și $BP \perp BC$, $P \in [CE]$, arătați că $2MN = BP$.

Notă:

- Timpul de lucru este de 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.

SUCCES!



Olimpiada Națională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a VIII-a

1. a. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $(x+1) + (x+2) + \dots + (x+100) = 5150$.

b. Demonstrați egalitatea:

$$1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2016}+\sqrt{2017}} = \sqrt{2017}$$

2. a. Demonstrați inegalitatea: $n \cdot k + 1 \geq 2\sqrt{n \cdot k}$, $\forall n, k \in \mathbb{N}^*$.

b. Demonstrați inegalitatea: $n^3 + n^2 + 2n \geq 4\sqrt{n}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. Se consideră un dreptunghi ABCD cu $AB=2$ și $BC=\sqrt{3}$. Punctul M aparține laturii AD astfel încât $MD = 2 \cdot AM$ și punctul N este mijlocul segmentului [AB]. Pe planul dreptunghiului se ridică perpendiculara MP și se alege punctul Q pe segmentul MP astfel încât măsura unghiului planelor (MPC) și (NPC) să fie de 45° , iar măsura unghiului planelor (MPC) și (QNC) să fie de 60° .

a. Demonstrați că dreptele DN și CM sunt perpendiculare.

b. Aflați lungimile segmentelor PM, respectiv QM.

4. Considerăm cubul ABCDA'B'C'D' de muchie $AB = a$, $a \in \mathbb{R}_+^*$. Considerăm

$M_k \in (A'D')$, $N_k \in (CC')$, $P_k \in (AB)$ astfel încât: $\frac{A'M_k}{M_k D'} = \frac{C'N_k}{N_k C} = \frac{BP_k}{P_k A} = k$, $k \in \mathbb{R}_+^*$.

a. Demonstrați că $\Delta M_k N_k P_k$ e echilateral.

b. Demonstrați că tetraedrele $DM_k N_k P_k$ și $B'M_k N_k P_k$ sunt piramide regulate.

c. Demonstrați că $(M_{k_1} N_{k_1} P_{k_1}) \parallel (M_{k_2} N_{k_2} P_{k_2})$, pentru orice $k_1 \neq k_2$, $k_i \in \mathbb{R}_+^*$, $i = \overline{1, 2}$.

Notă:

- Timpul de lucru este de 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.

SUCCES!



Olimpiada Națională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a IX-a

1. a) Să se demonstreze că $(1+x)^n + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \geq 2^{n+1}$, pentru orice $x > 0$ și $n \in \mathbb{N}$.
b) Să se arate că: $(\sqrt{2})^{2016} + (2 + \sqrt{2})^{2016} \geq 2^{2017}$
2. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = \frac{1}{3}$ și $1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{2n+3}$, $(\forall) n \geq 1$.
a) Aflați termenul general al șirului
b) Determinați valorile numărului natural $n \geq 2$, pentru care $\left\{ \sum_{k=2}^n a_k \right\} \in \left[\frac{1}{15}, \frac{1}{7} \right]$,
unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului x .
3. Să se determine funcțiile $f, g : R \rightarrow R$ știind că satisfac simultan condițiile:
i) $f(x-2) + 1 \leq x \leq g(x) + 1$, $\forall x \in R$ și
ii) $g(x+2) - 1 \leq x \leq f(x) - 1$, $\forall x \in R$.
4. În triunghiul oarecare ABC, fie D și E simetricele lui B față de A respectiv C.
Fie M, N, P și Q mijloacele segmentelor (CD), (AE), (CE) respectiv (BM), iar
 $BN \cap AC = \{S\}$. Demonstrați că punctele P, Q și S sunt coliniare.

Notă:

- Timpul de lucru este de 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.

SUCCES!



Olimpiada Națională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a X-a

1. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $f(f(x+y)) = y + f(x+2015)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

2. Fie $z \in \mathbb{C}^*$, astfel încât $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$ și $E_n = z^n + \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați E_{15} .

b) Determinați mulțimea $\{E_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

3. Demonstrați că pentru orice $a, b \in (1, \infty)$ are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \log_a \sqrt{b}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \log_b a^2}} \leq \sqrt{2}.$$

4. Fie paralelogramul ABCD. Pe laturile AB și AC se construiesc triunghiurile echilaterale ABE, spre exteriorul paralelogramului și respectiv BCF spre interiorul paralelogramului. Dacă are loc coliniaritatea punctelor E, D F, arătați că paralelogramul ABCD este romb.

Notă:

- Timpul de lucru este de 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.

SUCCES!



Olimpiada Națională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a XI-a

1. Se dau șirurile $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+\dots+k}$, $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$, $k \in \mathbb{N}$ și vectorul $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$, unde $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ și $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Determinați vectorul $\vec{u}$ care are proprietățile: $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ și $m(\widehat{\vec{u}, \vec{j}}) < \frac{\pi}{2}$.

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2017 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Să se determine matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care avem $X^{2017} + X = A$.

3. Fie șirul cu termenul general $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+2n+1}$, $n \geq 1$.

- a) Să se arate că: $\frac{2n+1}{(n+1)^2} \leq x_n \leq \frac{2n+1}{n^2+1}$, oricare ar fi $n \geq 1$.

- b) Calculați limita șirului $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

- c) Calculați: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{n+1} \right)$

4. a.) Calculați limita: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right)^x$.

- b.) Să se determine funcția $f: \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică condiția:

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 2 - 2x.$$

Notă:

- Timpul de lucru este de 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.

SUCCESE!



Olimpiada Națională de matematică

etapa locală, 17 februarie 2017

clasa a XII-a

1. a) Calculați derivata funcției $g: R \rightarrow R, g(x) = \frac{e^{\arctg x}(x^2 + ax + b)}{x^2 + 1}$, unde $a, b \in R$.

b) Calculați: $\int e^{e^{x^2} + x^2 + \ln x} dx, x \in (0, \infty)$

c) Calculați: $\int \frac{(x+2)e^{\arctg x}}{(x^2 + 1)^2} dx, x \in (0, \infty)$.

2. Pentru fiecare $n \in N, n \geq 2$, se consideră $I_n = \int \sqrt[n]{x^{n^2} + x^{n^2-n}} dx, x \in (0, \infty)$

a) Calculați I_2

b) Calculați $I_n, n \geq 2$.

3. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ fixate și $a^2 + b^2 \neq 0$. Considerăm mulțimea:

$$G = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ax & 1 & 0 \\ a^2x^2 + bx & 2ax & 1 \end{pmatrix} \mid x \in R \right) \right\} \subset M_3(R)$$

a) Demonstrați că G este parte stabilă a lui $M_3(R)$ în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Demonstrați că $(G, \cdot)$ este grup abelian izomorf cu grupul $(\mathbf{R}, +)$.

4. Fie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție derivabilă, cu proprietățile $f(0)=0, f(1)=1$ și $f'(x) \geq 1, \forall x \in [0, 1]$.

a) Arătați că există o funcție f cu proprietățile date.

b) Să se demonstreze că $\int_0^1 \frac{1}{f^2(x) + 1} dx \leq \frac{\pi}{4}$.

Notă:

- Timpul de lucru este de 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect se punctează cu maxim 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.

SUCCES!