

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
23.02.2018

Clasa a XII-a
Barem de corectare și notare

1. Se consideră mulțimile $M = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, m, n \text{ impare} \right\}$ și $G = M \times \mathbf{Z}$. Pe mulțimea G se definește legea de compoziție $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 + y_2)$, $\forall x_1, x_2 \in M, y_1, y_2 \in \mathbf{Z}$.
- Calculați $(1,1) * (1,2) * \dots * (1,2018)$;
 - Demonstrați că $(G, *)$ este grup abelian;
 - Arătați că funcția $f : G \rightarrow \mathbf{Q}^*$, $f((x, y)) = x \cdot 2018^y$ este un izomorfism între grupurile $(G, *)$ și $(\mathbf{Q}^*, \cdot)$.

Soluție:

- $(1,1) * (1,2) * \dots * (1,2018) = (1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1, 1 + 2 + \dots + 2018) = (1, 1009 \cdot 2019) \dots \dots \dots 1 \text{ p}$
- Se verifică axiomele grupului.
 Partea stabilă. $\dots \dots \dots 1 \text{ p}$
 Asociativitatea și comutativitatea. $\dots \dots \dots 1 \text{ p}$
 Elementul neutru $e = (1, 0) \in G \dots \dots \dots 1 \text{ p}$
 Elemente simetrizabile $(x', y') = (x^{-1}, -y) \in G \dots \dots \dots 1 \text{ p}$
- f morfism de grupuri. $\dots \dots \dots 1 \text{ p}$
 f bijectivă. $\dots \dots \dots 1 \text{ p}$

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.
- Aflați o primitivă a restricției funcției f la intervalul $[0, \pi]$.

Soluție:

- $F'(x) = f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$, $\forall x \in \mathbf{R} \dots \dots \dots 1 \text{ p}$
 $F'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R} \dots \dots \dots 1 \text{ p}$
 F strict crescătoare pe $\mathbf{R} \dots \dots \dots 1 \text{ p}$
- Pentru $x \in [0, \pi]$, $\int \frac{1}{3 + \cos x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C \dots \dots \dots 1 \text{ p}$

Fie $F : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + c_1, x \in [0, \pi) \\ c_2, x = \pi \end{cases}$ 1 p

Obține relația $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + c_1 = c_2$ 1 p

Finalizare.....1 p

3. Fie $(G, \cdot)$ un grup. Presupunem că există o funcție $f : G \rightarrow G$ injectivă astfel încât are loc relația:
 $x \cdot f(x^{2013} \cdot f(y)) = x^{2015} \cdot f(x \cdot y), \forall x, y \in G$. Demonstrați că grupul $(G, \cdot)$ este abelian.
 (Supliment G.M. 2015)

Soluție:

Consideră $x = e$, unde e este elementul neutru al grupului.....1 p

Inlocuiește în relația din enunț și obține $f(f(y)) = f(y), \forall y \in G$ 1 p

Din injectivitatea funcției f rezultă că $f(y) = y, \forall y \in G$ 1 p

Obține relația $x^{2014} \cdot y = x^{2016} \cdot y$ 1 p

Simplificând, obține $e = x^2$ 1 p

Obține relația $x \cdot y = y \cdot x, \forall x, y \in G$ 2 p

4. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, 0 \leq x \leq 1 \\ x-1, x > 1 \end{cases}$. Calculați $\int_0^1 \frac{f(2018^t)}{f(2018^{-t})} dt$.

Soluție:

$f(2018^t) = \begin{cases} 2018^t, t \leq 0 \\ 2018^t - 1, t > 0 \end{cases}$ 2 p

$f(2018^{-t}) = \begin{cases} 2018^{-t}, t \geq 0 \\ 2018^{-t} - 1, t < 0 \end{cases}$ 2 p

Deci $\int_0^1 \frac{f(2018^t)}{f(2018^{-t})} dt = \int_0^1 (2018^{2t} - 2018^t) dt = \frac{2017^2}{2 \ln 2018}$ 3 p