OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013

Clasa a V-a

Problema 1. a) Diferenţa a două numere este 714. Unul dintre numere este 2341. Calculaţi suma celor două numere. Câte soluţii are problema?
b) Produsul a două numere este 646. Mărind unul dintre numere cu 10, produsul devine 986. Aflaţi cele două numere.

Cătălin Mîinescu, Balş

Problema 2. Determinaţi numerele naturale nenule care împărţite la 6 dau câtul a şi restul b, iar împărţite la 11 dau câtul b şi restul a.

Valentin Rădulescu, Scorniceşti

Problema 3. Scriind primele 2013 numere naturale pare nenule, fără să le separăm, se formează un număr natural. Aflaţi a 2013-a cifră a acestui număr natural.

Bogdan Băbărelu, Crâmpoia

Problema 4. Un dreptunghi cu n linii şi m coloane este împărţit în pătrăţele 1×1. Pe prima linie coloram primul pătrăţel, pe a doua linie coloram primele doua pătrăţele, pe a treia linie primele patru pătrăţele, pe a patra linie primele opt pătrăţele ş.a.m.d., până când, pe a n-a linie se vor colora toate pătrăţelele. Ştiind că numărul total de pătrăţele colorate este 127, aflaţi câte linii şi câte coloane are dreptunghiul.

Mihaela Bucătaru

Problema 1. **a)** Numărul 2341 poate fi atât descăzut, cât şi scăzător. Problema are două soluţii:
Dacă 2341 este descăzut, celălalt număr este 2341 – 714 = 1627 .... (2p)
Dacă 2341 este scăzător, celălalt număr este 2341 + 714 = 3055 .... (2p)
b) Fie a şi b cele două numere; atunci $a\cdot b=646$. Dacă a se măreşte cu 10, atunci:
$(a+10)\cdot b=986$, de unde rezultă că $ab+10b=986$ .... (1p)
Obţinem $10b=340$, de unde $b=34$ şi $a=19$ .... (2p)

Problema 2. Fie n un număr ca în enunţ; atunci avem relaţiile $\begin{cases} n=6a+b, & b<6 \\ n=11b+a, & a<11 \end{cases}$ .... (2p)
Din relaţiile de mai sus rezultă $6a+b=11b+a$, de unde $a=2b$ şi $n=13b$ .... (2p)
Cum $a,b\neq 0$, avem $b\in\{1,2,3,4,5\}$, pentru care se observă că $a=2b<11$.
În concluzie, soluţiile problemei sunt 13, 26, 39, 52, 65 .... (3p)

Problema 3. Pentru scrierea numerelor de la 2 la 8 se folosesc 4 cifre. De la 10 la 98 sunt 45 de numere pare, pentru scrierea cărora se folosesc $2\cdot45=90$ cifre .... (1p)
Sunt 450 de numere pare de trei cifre, pentru scrierea lor fiind nevoie de 1350 cifre .... (2p)
Ca urmare, pentru a scrie toate numerele pare de la 2 la 998 este nevoie de 1350 + 90 + 4 = 1444 cifre.
Mai trebuie scrise numere de patru cifre pentru a acoperi restul de 2013 – 1444 = 569 cifre
Cum 569 : 4 = 142, rest 1, înseamnă că cifra căutată este prima cifră a celui de-al 143-lea număr par de patru cifre (pentru că trebuie scrise 142 de numere pare de patru cifre şi încă o cifră) .... (2p)
Al 143-lea număr par de patru cifre este $1000+2\cdot142=1284$, deci cifra căutată este 1 .... (2p)

Problema 4. Pe prima linie a dreptunghiului se colorează 1 (un) pătrăţel, pe a doua 2 pătrăţele, pe a treia 2^2, pe următoarea 2^3 şi aşa mai departe, pe ultima linie se colorează 2^{n-1} pătrăţele .... (2p)
Numărul total de pătrăţele colorate este $1+2^1+2^2+...+2^{n-1}=2^n-1$ (cu demonstraţie!) .... (3p)
Obţinem ca $2^n-1=127$, de unde $n=7$. Dreptunghiul are 7 linii şi $2^6=64$ coloane (numărul coloanelor este egal cu numărul de pătrăţele colorate ale ultimei linii) .... (2p)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013

Clasa a VI-a

Problema 1. Aflaţi numerele naturale de forma $\overline{ab}$, cu $a,b \neq 0$, care sunt divizibile cu $2a+3b$.

Gheorghe Ştefana, Slatina

Problema 2. Aflaţi cele mai mici numere naturale consecutive $a<b<c<d$ ştiind că ele sunt divizibile cu 19, 17, 15 respectiv 13.

Costel Anghel, Scorniceşti

Problema 3. Fie triunghiul *ABC* în care măsura unghiului *A* este de şapte ori mai mare decât măsura unghiului *B*. Mediatoarea segmentului [*AB*] intersectează dreapta *CA* în *M*. Ştiind că dreptele *BM* şi *BC* sunt perpendiculare, aflați măsurile unghiurilor triunghiului *ABC*.

Valentin Rădulescu, Scorniceşti

Problema 4. Determinaţi numerele naturale nenule *x*, *y*, *z* care verifică relaţiile

$$\frac{3x}{x+3}=\frac{5y}{y+5}=\frac{7z}{z+7}.$$

Daniela Nadia Taclit, Slatina

Problema 1. Deoarece $2a+3b|\overline{ab}$, rezultă că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\overline{ab}=k(2a+3b)$ .... (1p)

Se observă că pentru $k \geq 5$ avem $5(2a+3b)=10a+15b>10a+b=\overline{ab}$, deci $k \in \{1,2,3,4\}$ .... (2p)

Pentru $k=1$ avem $10a+b=2a+3b \Rightarrow b=4a$, cu soluţiile $a=1, b=4$ şi $a=2, b=8$ .... (1p)

Pentru $k=2$ avem $10a+b=4a+6b \Rightarrow 5b=6a$, cu soluţiile $a=5, b=6$ .... (1p)

Pentru $k=3$ avem $10a+b=6a+9b \Rightarrow a=2b$, cu soluţiile $a=2, b=1$; $a=4, b=2$;
$a=6, b=3$ şi $a=8, b=4$ .... (1p)

Pentru $k=4$ avem $10a+b=8a+12b \Rightarrow 11b=2a$, pentru care nu se obţin soluţii ……......... (1p)

În concluzie, numerele căutate sunt 14, 28, 56, 21, 42, 63 şi 84.

Problema 2. Folosind proprietăţile divizibilităţii, avem relaţiile

$$19 \mid a \Rightarrow 19 \mid 2a \Rightarrow 19 \mid 2a+19$$
$$17 \mid a+1 \Rightarrow 17 \mid 2a+2 \Rightarrow 17 \mid 2a+2+17 \Rightarrow 17 \mid 2a+19$$
$$15 \mid a+2 \Rightarrow 15 \mid 2a+4 \Rightarrow 15 \mid 2a+4+15 \Rightarrow 15 \mid 2a+19$$
$$13 \mid a+3 \Rightarrow 13 \mid 2a+6 \Rightarrow 13 \mid 2a+6+13 \Rightarrow 13 \mid 2a+19$$

.... (4p)

Ca urmare, $2a+19$ este divizibil cu c.m.m.m.c. al numerelor 13, 15, 17 şi 19, adică cu 62985 ... (2p)

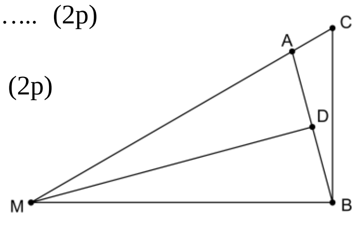
Cea mai mică valoare a lui *a* se obţine când $2a+19=62985$, pentru care $a=31483$. Numerele căutate sunt $31483=19\cdot1657$, $31484=17\cdot1852$, $31485=15\cdot2099$ şi $31486=13\cdot2422$ .... (1p)

Problema 3. Fie $m(\sphericalangle ABC)=x$; atunci $m(\sphericalangle BAC)=7x$ şi $m(\sphericalangle MBA)=90^\circ-x$ ……... (2p)

Deoarece *M* se află pe mediatoarea lui [*AB*], rezultă că triunghiul *MAB* este isoscel, deci $m(\sphericalangle MAB)=m(\sphericalangle MBA)=90^\circ-x$ .... (2p)

Deoarece $m(\sphericalangle MAB)+m(\sphericalangle BAC)=180^\circ$, rezultă că $90^\circ-x+7x=180^\circ$, de unde $x=15^\circ$ .... (1p)

Unghiurile triunghiului *ABC* au măsurile 15°, 105°, 60° .... (2p)



Problema 4. Relaţia din enunţ este echivalentă cu $\frac{1}{3}+\frac{1}{x}=\frac{1}{5}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7}+\frac{1}{z}$ .... (1p)

Atunci $\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{7}=\frac{4}{21}$, de unde $\frac{1}{x}=\frac{1}{z}-\frac{4}{21}$, adică $x=\frac{21z}{21-4z}$ .... (2p)

Cum $x \in \mathbb{N}$, rezultă $21-4z>0$, deci $z \in \{1,2,3,4,5\}$ .... (2p)

Studiind cazurile, se obţine singura soluţie $z=5,\ x=105,\ y=7$ .... (2p)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013 - Clasa a VII-a

Problema 1. Aflaţi numerele întregi cu proprietatea că $\left(x^2+6x+52\right)\left(y^2-10y+84\right)=2537$.

Bogdan Băbărelu, Crâmpoia

Problema 2. Fie *G* centrul de greutate al triunghiului *ABC*. Prelungim segmentele [*AG*], [*BG*] şi [*CG*] cu $[GD]\equiv[AG]$, $[GE]\equiv[BG]$, respectiv $[GF]\equiv[CG]$. Arătaţi că:

a) Triunghiurile *AEF* şi *BDC* sunt congruente.

b) $\frac{1}{2}<\frac{GD+GE+GF}{P_{DEF}}<\frac{2}{3}$, unde P_{DEF} este perimetrul triunghiului *DEF*.

Bogdan Băbărelu, Crâmpoia

Problema 3. La o masă ovală sunt aşezate 25 de persoane. În dreptul fiecăreia se află un cartonaş pe care este scris un număr real pozitiv. Se ştie că suma numerelor scrise pe cartonaşe este 2025 şi că modulul diferenţei numerelor scrise pe cartonaşelor oricăror două persoane alăturate este aceeaşi. Aflaţi numerele scrise pe cele 25 de cartonaşe.

Dincă Pepino, Caracal

Problema 4. În pătratul *ABCD* de latură 5 cm, se consideră punctele $E\in(BC)$, $F\in(CD)$ astfel încât $m(\sphericalangle EAF)=45°$. Dacă aria triunghiului *CEF* este de 3 cm^2, calculaţi aria triunghiului *AEF*.

Nicolae Bivol, Corabia

Problema 1. Avem $x^2+6x+52=(x+3)^2+43$ .... (2p)

$y^2-10y+84=(y-5)^2+59$ .... (2p)

Atunci $2537=\left[(x+3)^2+43\right]\cdot\left[(y-5)^2+59\right]\geq 43\cdot 59=2537$ .... (2p)

Ca urmare, $(x+3)^2+43=43$ şi $(y-5)^2+59=59$, de unde $x=-3$ şi $y=5$ .... (1p)

Problema 2. **a)** Patrulaterele *ABDE*, *ACDF*, *BCEF* sunt paralelograme .... (2p)

$BD=AE,\ CD=AF,\ BC=EF$, deci $\Delta BCD\equiv\Delta EFA$ (cazul LLL) .... (1p)

b) $AB=DE,\ AC=DF,\ BC=EF$, deci $P_{DEF}=P_{ABC}$ .... (1p)

Deoarece $AB<AG+BG,\ BC<BG+CG,\ CA<CG+AG$, rezultă că:

$P_{ABC}<2(AG+BG+CG)=2(GD+GE+GF)$, de unde $\frac{1}{2}<\frac{GD+GE+GF}{P_{DEF}}$ .... (1p)

Fie A',B',C' mijloacele laturilor [*BC*], [*CA*], [*AB*], atunci $AG+BG+CG=\frac{2}{3}(AA'+BB'+CC')$

Relaţia $GD+GE+GF<\frac{2}{3}P_{DEF}$ este echivalentă cu $AA'+BB'+CC'<AB+BC+CA$, care se obţine din relaţiile $AA'<\frac{1}{2}\left(AB+AC\right)$ şi analoagele (lungimea fiecărei mediane a unui triunghi este mai mică decât media aritmetică a lungimilor laturilor ce pleacă din acelaşi vârf) .... (2p)

Problema 3. Fie $x_1,x_2,...,x_{25}$ numerele scrise pe cele 25 de cartonaşe. Atunci

$|x_1-x_2|=|x_2-x_3|=...=|x_{24}-x_{25}|=|x_{25}-x_1|\overset{not}{=}d$ .... (1p)

Atunci există o alegere a semnelor +/– astfel încât

$x_1-x_2=\pm d,\ x_2-x_3=\pm d,...,x_{24}-x_{25}=\pm d, x_{25}-x_1=\pm d$ .... (2p)

Adunând aceste relaţii, rezultă $0=d\cdot(\pm1\pm1\pm...\pm1)$ (în paranteză 1 apare de 25 de ori) .... (2p)

Indiferent de combinaţia de semne +/–, numărul din paranteză este întreg impar, deci nenul, de unde rezultă că $d=0$. Ca urmare, $x_1=x_2=...=x_{25}=\frac{2025}{25}=81$ .... (2p)

Problema 4. Se prelungeşte [*CB*] cu segmentul $[BT]\equiv[DF],\ B\in(TE)$ .... (1p)

$\Delta ADF\equiv\Delta ABT\Rightarrow\sphericalangle TAB\equiv\sphericalangle DAF\Rightarrow m(TAE)=m(\sphericalangle TAB)+m(\sphericalangle BAE)=90^\circ-45^\circ=45^\circ$ ...... (1p)

$\Delta TAE\equiv\Delta FAE\Rightarrow A_{TAE}=A_{FAE}\ si\ A_{TAE}=A_{ABT}+A_{ABE}=A_{ADF}+A_{ABE}\Rightarrow A_{FAE}=A_{ADF}+A_{ABE}$ .... (2p)

$A_{ABEFD}=2A_{AEF}$ .... (1p)

$A_{AEF}=\left(A_{ABCD}-A_{CFE}\right):2=\left(25-3\right):2=11\,\text{cm}^2$ .... (2p)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013 - Clasa a VIII-a

Problema 1. Se consideră numerele reale pozitive a, b, c astfel încât $abc=1$.
Aflaţi valoarea expresiei $E=\dfrac{7a-5}{ab+a+1}+\dfrac{7b-5}{bc+b+1}+\dfrac{7c-5}{ca+c+1}$.

Ion Neaţă,Slatina

Problema 2. Se consideră numerele iraţionale a, b cu proprietatea că există $x, y \in \mathbb{Q}^*$ astfel încât $a^3-b^3=x\sqrt{7}$ şi $a-b=y\sqrt{7}$. Arătaţi că $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}\in\mathbb{Q}$.

Ion Neaţă, Slatina

Problema 3. Numerele reale a şi b verifică relaţiile:

$$a^3+12a^2+49a+69=0 \quad \text{şi} \quad b^3-9b^2+28b-31=0.$$

Calculaţi $(a+b)^{2013}$.

Iuliana Traşcă, Scorniceşti

Problema 4. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB=40$ cm, $BC=30$ cm, iar planele $(A'BD)$ şi $(C'BD)$ sunt perpendiculare. Determinaţi lungimea muchiei AA' şi calculaţi distanţa dintre planele $(AB'D')$ şi $(C'BD)$.

S.L.T.

Problema 1. Se observă că $a\cdot(bc+b+1)=abc+ab+a=ab+a+1$ .... (2p)

$ab\cdot(ca+c+1)=abc\cdot a+abc+ab=a+1+ab$ .... (2p)

Amplificând cu a a doua fracţie a sumei E şi cu ab pe a treia, obţinem

$$E=\frac{7a-5}{ab+a+1}+\frac{7ab-5a}{a(bc+b+1)}+\frac{7abc-5ab}{ab(ca+c+1)}=\frac{7a-5}{ab+a+1}+\frac{7ab-5a}{ab+a+1}+\frac{7-5ab}{ab+a+1}=$$

$$=\frac{7a-5+7ab-5a+7-5ab}{ab+a+1}=\frac{2ab+2a+2}{ab+a+1}=2$$ .... (3p)

Problema 2. Deoarece $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, rezultă că $a^2+ab+b^2=\dfrac{a^3-b^3}{a-b}=\dfrac{x}{y}\in\mathbb{Q}$ **(1)** .... (1p)

Cum $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=7y^2\in\mathbb{Q}$ **(2)** .... (2p)

Din relaţiile **(1)** şi **(2)** rezultă că $ab\in\mathbb{Q}$ şi $a^2+b^2\in\mathbb{Q}$ .... (2p)

Atunci $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{a^4+b^4}{(ab)^2}=\dfrac{(a^2+b^2)^2-2(ab)^2}{(ab)^2}\in\mathbb{Q}$ .... (2p)

Problema 3. $a^3+12a^2+49a+69=0\Leftrightarrow(a+4)^3+(a+4)+1=0$ **(1)** .... (2p)

$b^3-9b^2+28b-31=0\Leftrightarrow(b-3)^3+(b-3)-1=0$ **(2)** .... (2p)

Prin însumarea relaţiilor (1) şi (2) avem: $(a+4)^3+(a+4)+(b-3)^3+(b-3)=0$ .... (1p)

Notând $x=a+4,\ y=b-3$, rezultă $x^3+y^3+x+y=0\Leftrightarrow(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2+1)=0$, de unde se obţine $x+y=0$, adică $a+b=-1$ şi $(a+b)^{2013}=-1$ .... (2p)

Problema 4. Planele $(A'BD)$ şi $(C'BD)$ sunt egal înclinate în raport cu (ABC), deci $m(\sphericalangle(C'BD);(ABC))=45^\circ$ ...... (1p)

Fie $P\in(BD)$ astfel încât $C'P\perp BD$, rezultă că $m(\sphericalangle(C'BD);(ABC))=m(\sphericalangle CPC')=45^\circ$ .... (2p)

Planele $(AB'D')$ şi $(C'BD)$ sunt paralele şi determină pe diagonala $[A'C]$ segmente congruente având lungimea egală cu $\dfrac{1}{3}\cdot A'C$ .... (1p)

Deducem că distanţa dintre planele $(AB'D')$ şi $(C'BD)$ este egală cu $d(C;(C'BD))$ şi

$$d(C;(C'BD))=d(C;C'P)=12\sqrt{2}\text{ cm}$$ .... (2p)

Deducem că $CC'=CP=\dfrac{CB\cdot CD}{BD}=24$ cm .... (1p)